

MATEMATIKAI STATISZTIKA

elemei

Dr. Kausay Tíbor

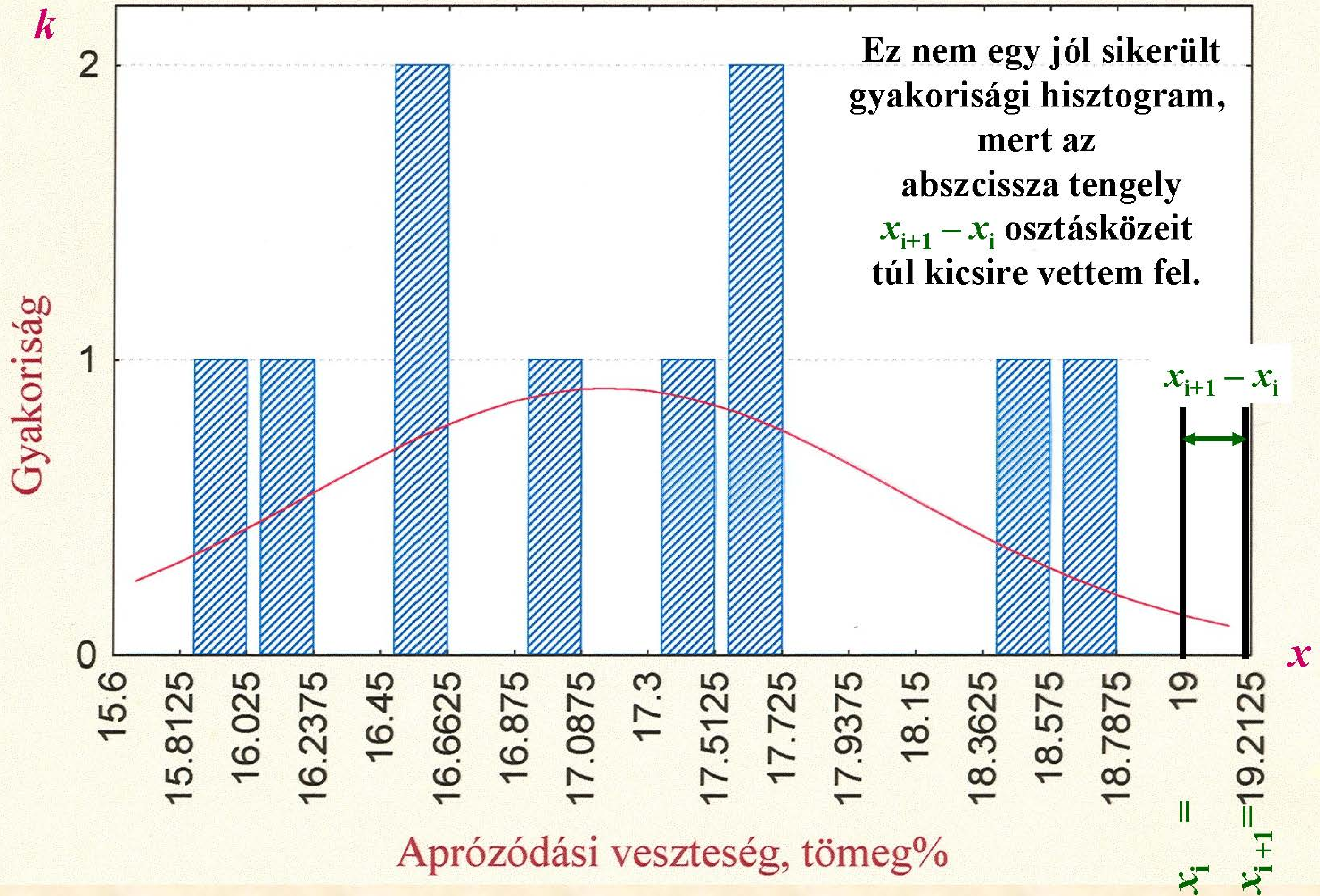
Budapest, 2012. február

Los Angeles aprózódási veszteség [tömeg%]

Minta	Rendezett minta
16,5	15,9
17,7	16,1
16,1	16,5
18,6	16,6
17,4	16,9
15,9	17,4
17,7	17,7
18,4	17,7
16,6	18,4
16,9	18,6

PÉLDA A
GYÁKORISÁG-
FÜGGVÉNY
SZERKESZTÉSÉRE

Los Angeles aprózódás mérési eredmények normál (Gauss) görbéje



**Az x abszcissa tengely felosztására nincs pontos szabály,
de az osztáspontok megválasztása
általában akkor szerencsés,
ha minden $x_{i+1} - x_i$ intervallumba körülbelül**

$$\sqrt[3]{n}$$

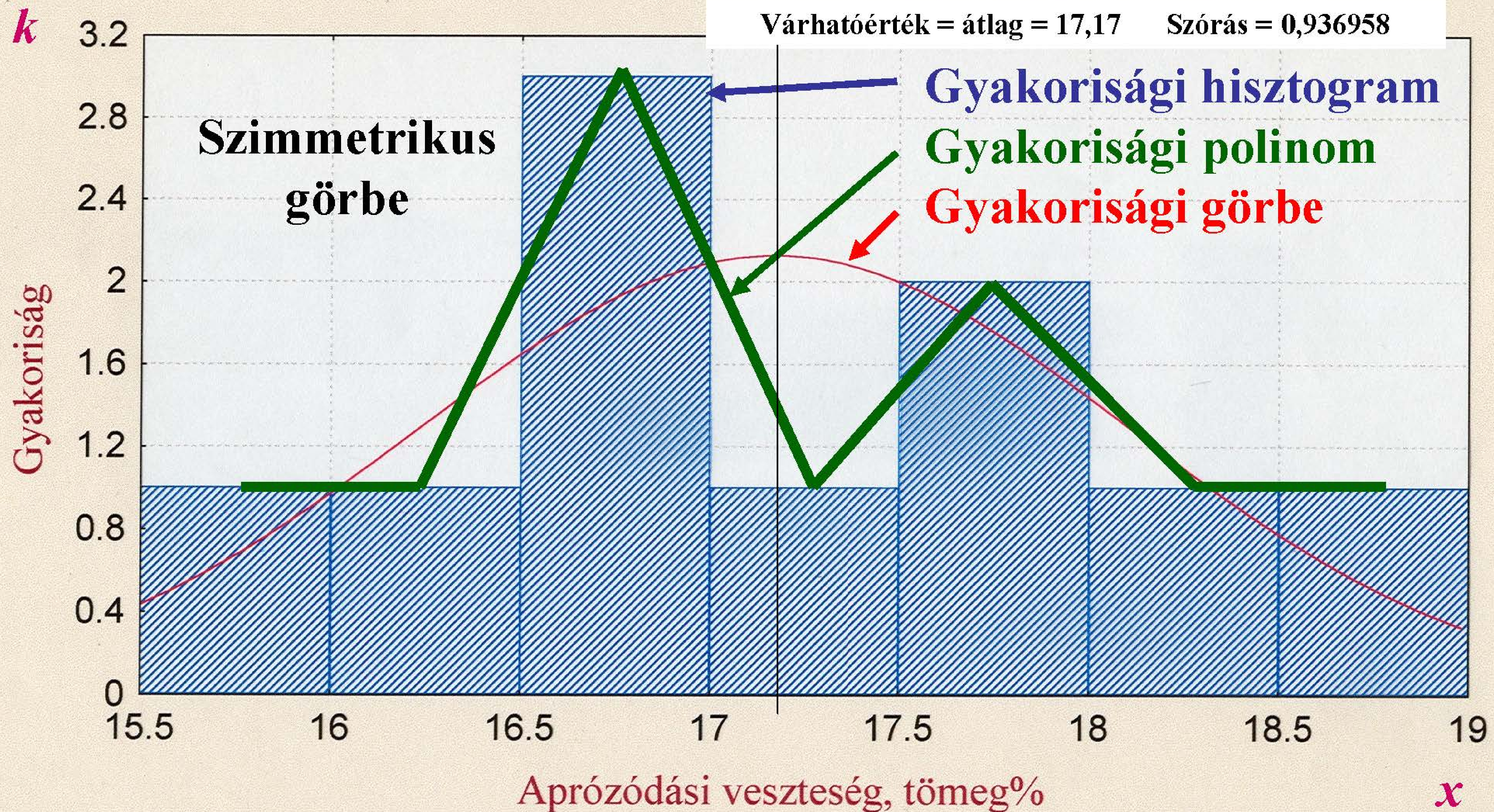
mintaelem jut, ahol n a mintaelemek száma.

**Példánk esetén az elemek száma $n = 10$, és ideális
esetben $\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{10} = 2,154$ elem jut egy intervallumba.
A $19,0 - 15,5 = 3,5$ terjedelmet tehát $n/2,154 = 10/2,154 =$
 $= 4,6 \sim 5$ intervallumra a legcélszerűbb osztani.**

**Ehhez igazodva az új ábrán 7 darab $x_{i+1} - x_i = 0,5$
terjedelmű intervallumot alkalmaztunk.**

Los Angeles aprózódás mérési eredmények normál (Gauss) görbéje (2)

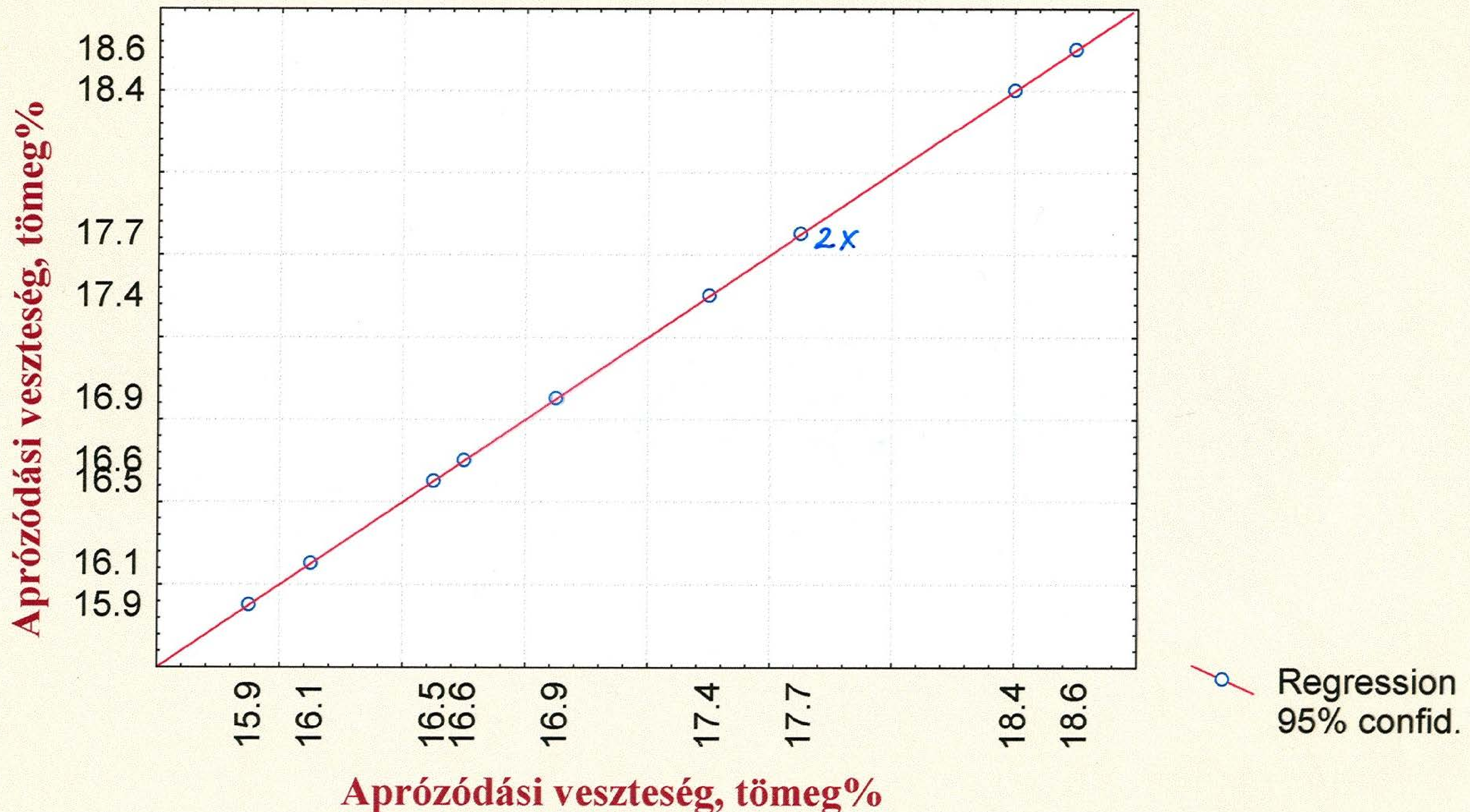
$10 * 0.5 * \text{normal}(x, 17.17, 0.936958)$



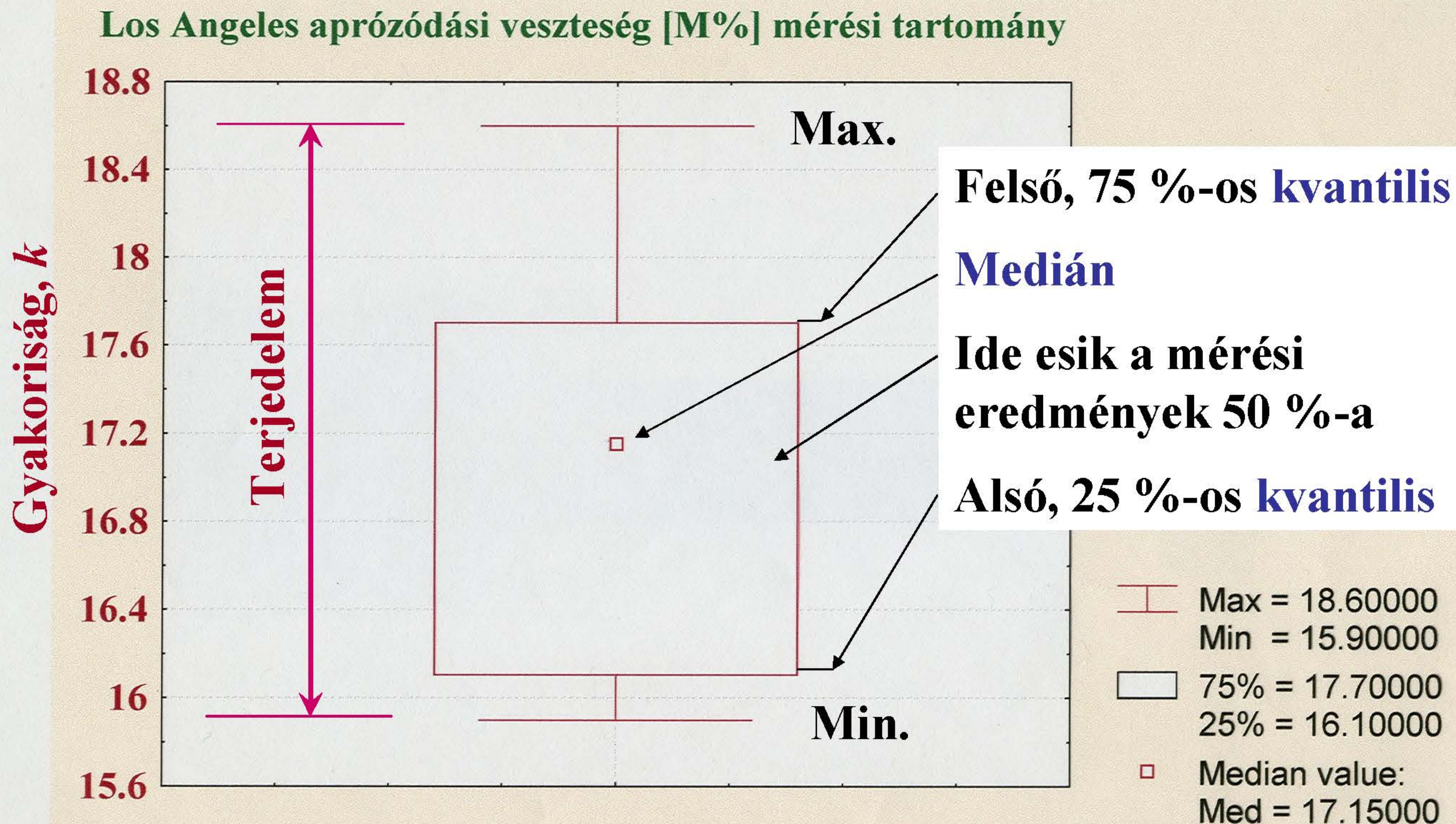
Ez a gyakorisági hisztogram már jobban néz ki, mert az abszcissza tengely $x_{i+1} - x_i$ osztásközei nagyobbak, mint az előző ábrán voltak.

Ez az ábra a gyakorisági ábra „felülnézeteként” értelmezhető.
Az ábra nagyon jól szemlélteti, hogy a mérési eredmények
elhelyezkedése az abszcissza tengelyen *nem szimmetrikus*.

Los Angeles aprózódás mért értékei sorba rendezve



Ez az ábra is a gyakorisági ábra „felülnézeteként” értelmezhető



Medián = Az 50 %-os kvantilis neve, illetve értéke. A páratlan számú rendezett minta esetén a középső elem értéke, a páros számú esetén a két középső elem átlagértéke.

**Ha a k tapasztalati gyakorisági értékeket elosztjuk a mintaelemek n számával
(ez példánk esetén $n = 10$ volt),
akkor a $p' = k/n$ tapasztalati **relatív gyakoriságokat**
kapjuk.**

Az ordináta tengelyre a $p' = k/n$ tapasztalati relatív gyakoriságokat felrakva a tapasztalati **eloszlásfüggvényre,
más néven tapasztalati **sűrűségfüggvényre** (p') jutunk.**

**A sűrűségfüggvény alatti terület értéke 1,0,
vagy százalékban kifejezve 100 %.**

A p' sűrűségfüggvény egyes x_i abszcissa értékeitől balra vett görbe alatti területek értékét koordinátarendszerbe felhordva a (tapasztalati) p **eloszlásfüggvényt kapjuk.**

Eloszlásfüggvény és jellemzői (az MSZ 18288-5:1981 szabvány szerint)

Egyenlőtlenségi
együthetők:

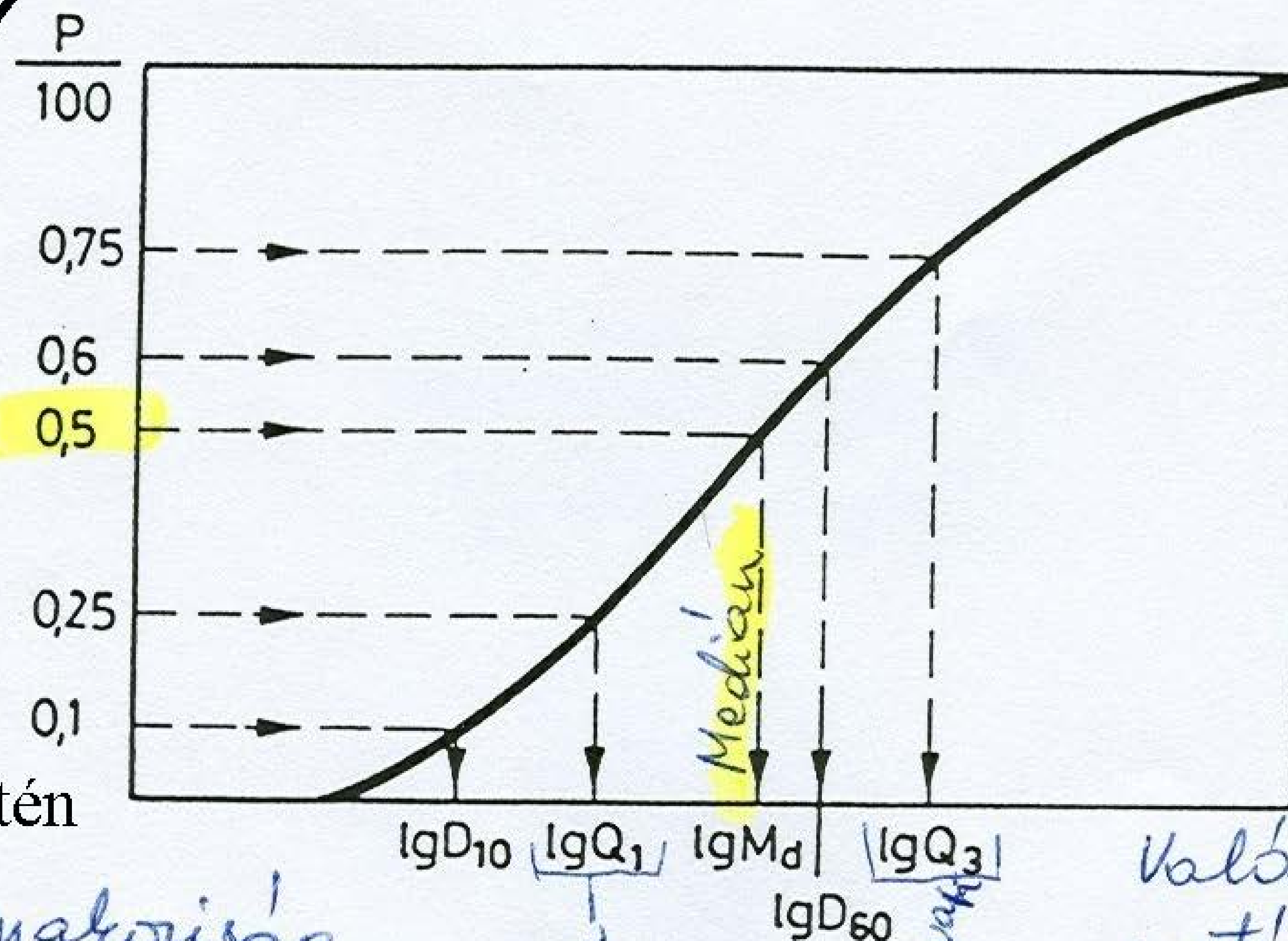
$$U_{60} = \frac{D_{60}}{D_{10}}$$

vagy

$$U_{70} = \frac{D_{70}}{D_{10}}$$

adalékanyagok esetén

kőanyag szemhalmazok esetén általában



Alsó kvantilis

Felső kvantilis

Orta lyorothági
érték:

$$DQ_g = \sqrt{\frac{Q_3}{Q_1}}$$

Asszimetria értéke:

$$SK_g = \sqrt{\frac{Q_1 \times Q_3}{M_d^2}}$$

Módusz = A gyakoriság
függvény legnagyobb értéké-
hez tartozó valószínűségi változó.

Valószínűség eloszlás
esetén a tengely beosztás
lineáris

Valahol olvastam: A brüsszeli városvezetés a Brüsszelben élő *Carl Friedrich Gauss* német matematikust felkérte arra, hogy végezzen matematikai módszerrel lakossággal kapcsolatos felmérést. Könnyen lehetséges az, hogy a világ első ilyen felmérése született *Gauss* módszerével, és talán Brüsszel városa volt az első, aki megbízást adott a tudományos megalapozottságot igénylő munkára.

Gauss Brüsszel lakosait kirendeltette a templom előtti térre, és ott a toronyból irányítva nagyságrend alapján rendezte őket, mégpedig úgy, hogy középen a legmagasabbak és két oldalra csökkenő magasságúakat állította. Így alakult ki a *Gauss* görbe, mely harang alakú. Ebből a görbéből számításokkal meghatározta, hogy a lakosságnak hány %-a nagyon alacsony, alacsony középmezőnyű, magasabb és igen magas.



Carl Friedrich Gauss

német matematikus

portréja

(Gottlieb Biermann

festménye, 1887)

Született:

**Német-római Birodalom,
Braunschweig-Lüneburgi
hercegség, Braunschweig,**

1777. április 30.

Meghalt:

Hannoveri Királyság,

Göttingen,

1855. február 23.

Forrás: Wikipédia

DG7678836U6



Deutsche Bundesbank
Frankfurt am Main
1. Oktober 1993

**A német márkát 2001. december 31-én kivonták a forgalomból,
mert 2002. január 1-én az euro lett a fizetőeszköz Németországban.**

Tessék megfigyelni a pénzen a *Gauss*-görbét és egyenletét.

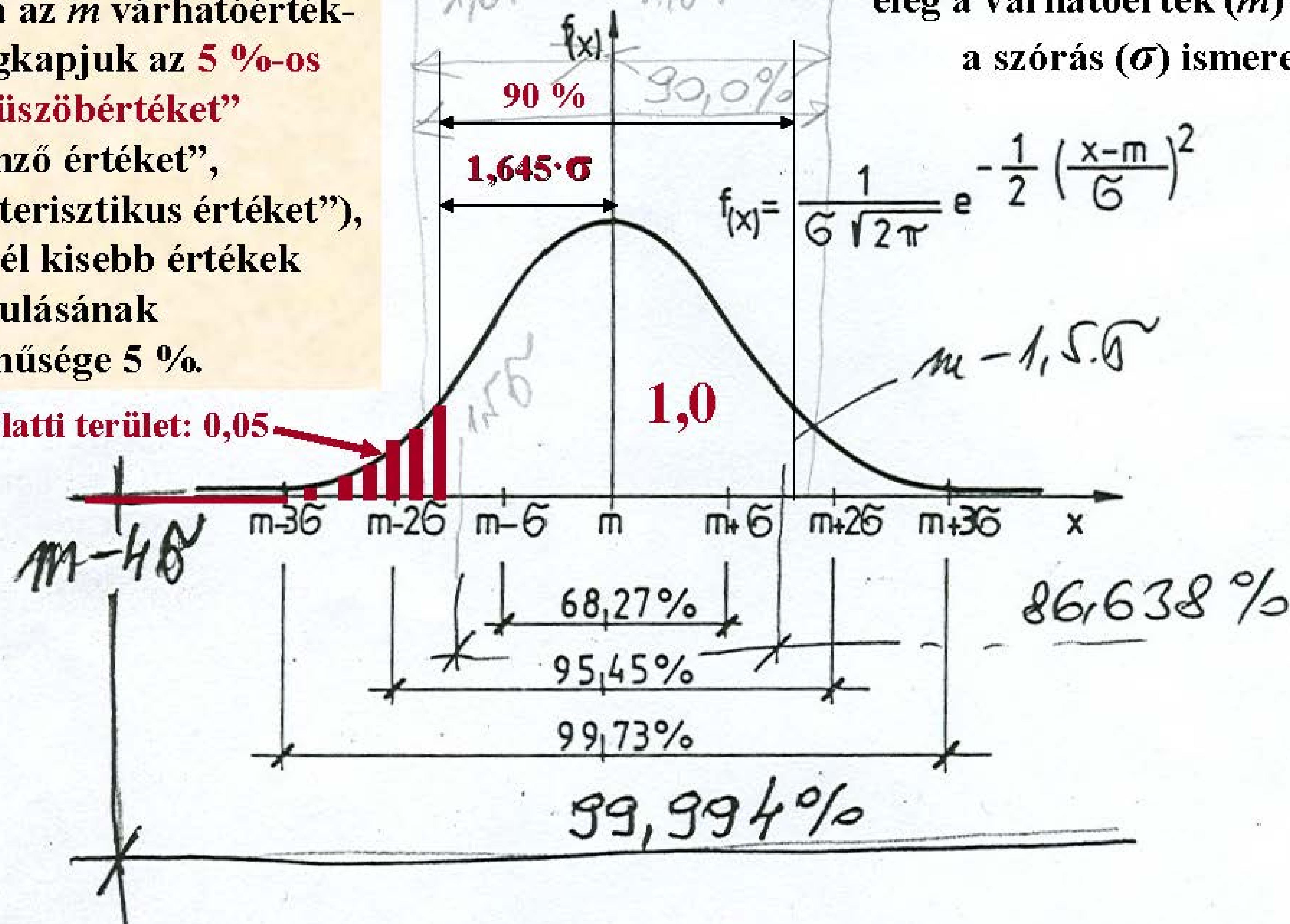
Ezt a példányt 2001. június 19-én vásároltam az OTP-ben:

PÉNZNEM /Currency/	VALUTA/CSEKK ÖSSZEG /FX Amount/	ÁRFOLYAM * /Exchange rate/	FORINT ELLENÉRTÉK /HUF equivalent/
DEM	10,00	129,18	1.292

A σ szórás 1,645-szeresét
levonva az m várhatóérték-
ből megkapjuk az **5 %-os**
alsó „küszöbértéket”
(„jellemző értéket”,
„karakterisztikus értéket”),
amelynél kisebb értékek
előfordulásának
valószínűsége 5 %.

Görbe alatti terület: 0,05

A Gauss függvény megadásához
elég a várhatóérték (m) és
a szórás (σ) ismerete.



Normális (Gauss-sűrűségfüggvény)

Előzetes - Ziermann: Matematikai statisztika

TÁBLÁZATOK

1. táblázat

Előzetes fr.: $\Delta \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ függvény értékeinek táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,44	0,6700	0,88	0,8106	1,32	0,9066
0,01	0,5040	0,45	0,6736	0,89	0,8133	1,33	0,9082
0,02	0,5080	0,46	0,6772	0,90	0,8159	1,34	0,9099
0,03	0,5120	0,47	0,6808	0,91	0,8186	1,35	0,9115
0,04	0,5160	0,48	0,6844	0,92	0,8212	1,36	0,9131
0,05	0,5199	0,49	0,6879	0,93	0,8238	1,37	0,9147
0,06	0,5239	0,50	0,6915	0,94	0,8264	1,38	0,9162
0,07	0,5279	0,51	0,6950	0,95	0,8289	1,39	0,9177
0,08	0,5319	0,52	0,6985	0,96	0,8315	1,40	0,9192
0,09	0,5359	0,53	0,7019	0,97	0,8340	1,41	0,9207
0,10	0,5398	0,54	0,7054	0,98	0,8365	1,42	0,9222
0,11	0,5438	0,55	0,7088	0,99	0,8389	1,43	0,9236
0,12	0,5478	0,56	0,7123	1,00	0,8413	1,44	0,9251
0,13	0,5517	0,57	0,7157	1,01	0,8438	1,45	0,9265
0,14	0,5557	0,58	0,7190	1,02	0,8461	1,46	0,9279
0,15	0,5596	0,59	0,7224	1,03	0,8485	1,47	0,9292
0,16	0,5636	0,60	0,7257	1,04	0,8508	1,48	0,9306
0,17	0,5675	0,61	0,7291	1,05	0,8531	1,49	0,9319
0,18	0,5714	0,62	0,7324	1,06	0,8554	1,50	0,9332
0,19	0,5753	0,63	0,7357	1,07	0,8577	1,51	0,9345
0,20	0,5793	0,64	0,7389	1,08	0,8599	1,52	0,9357
0,21	0,5832	0,65	0,7422	1,09	0,8621	1,53	0,9370
0,22	0,5871	0,66	0,7454	1,10	0,8643	1,54	0,9382
0,23	0,5910	0,67	0,7486	1,11	0,8665	1,55	0,9394
0,24	0,5948	0,68	0,7517	1,12	0,8686	1,56	0,9406
0,25	0,5987	0,69	0,7549	1,13	0,8708	1,57	0,9418
0,26	0,6026	0,70	0,7580	1,14	0,8729	1,58	0,9429
0,27	0,6064	0,71	0,7611	1,15	0,8749	1,59	0,9441
0,28	0,6103	0,72	0,7642	1,16	0,8770	1,60	0,9452
0,29	0,6141	0,73	0,7673	1,17	0,8790	1,61	0,9463
0,30	0,6179	0,74	0,7703	1,18	0,8810	1,62	0,9474
0,31	0,6217	0,75	0,7734	1,19	0,8830	1,63	0,9484
0,32	0,6255	0,76	0,7764	1,20	0,8849	1,64	0,9495
0,33	0,6293	0,77	0,7794	1,21	0,8869	1,65	0,9505
0,34	0,6331	0,78	0,7823	1,22	0,8888	1,66	0,9515
0,35	0,6368	0,79	0,7853	1,23	0,8907	1,67	0,9525
0,36	0,6406	0,80	0,7881	1,24	0,8925	1,68	0,9535
0,37	0,6443	0,81	0,7910	1,25	0,8944	1,69	0,9545
0,38	0,6480	0,82	0,7939	1,26	0,8962	1,70	0,9554
0,39	0,6517	0,83	0,7967	1,27	0,8980	1,71	0,9564
0,40	0,6554	0,84	0,7995	1,28	0,8997	1,72	0,9572
0,41	0,6591	0,85	0,8023	1,29	0,9015	1,73	0,9582
0,42	0,6628	0,86	0,8051	1,30	0,9032	1,74	0,9591
0,43	0,6664	0,87	0,8078	1,31	0,9049	1,75	0,9599

Valószínűségi szint %-ban = $100(2\Phi - 1)$
 mert: $100\{1 - (1 - \Phi) \times 2\} = 100(1 - 2 + 2\Phi)$

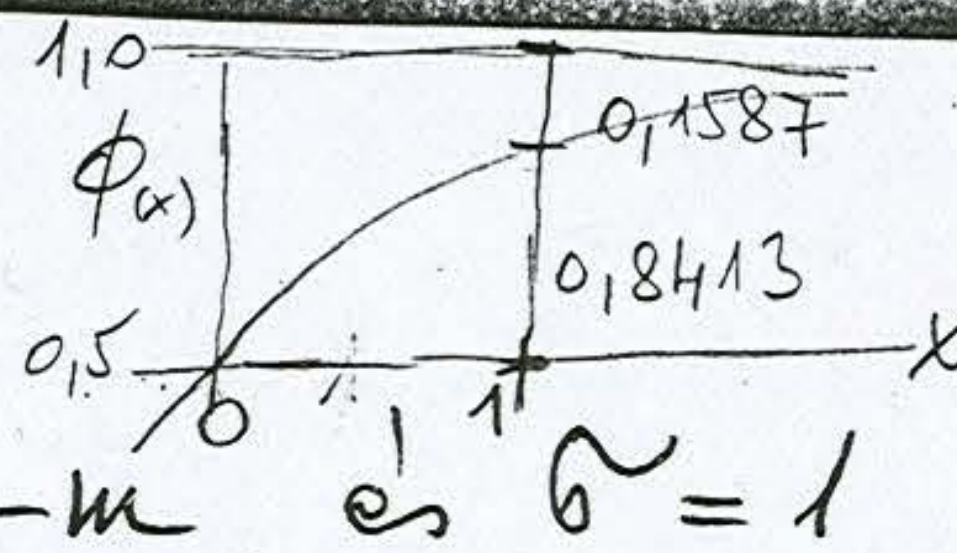
164

1,645x0 esete:

$$\Delta = \frac{100 - 95}{5\%} = \frac{5}{5\%} = 100$$

$$1 - 0,1 = 0,9$$

azaz alul és felül is 4,01%
 mert $100 - 95,98 = 4,02$



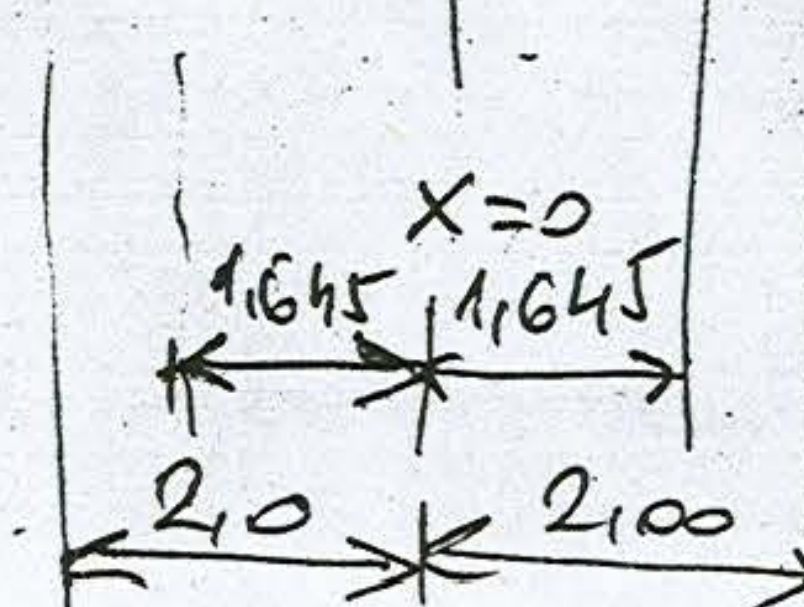
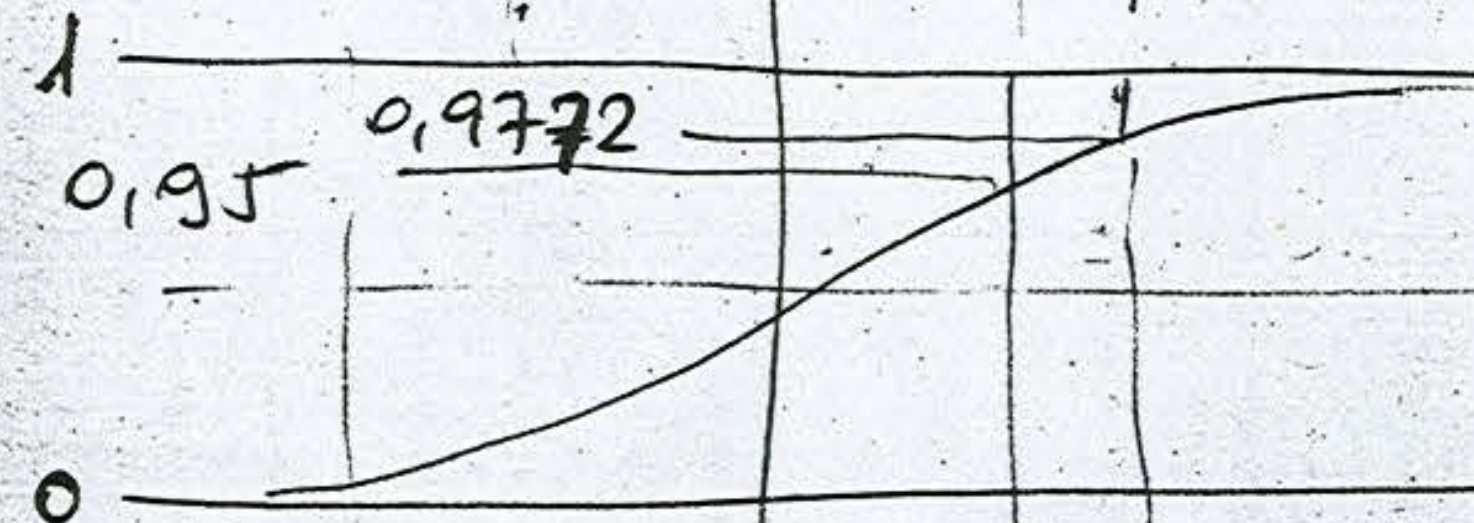
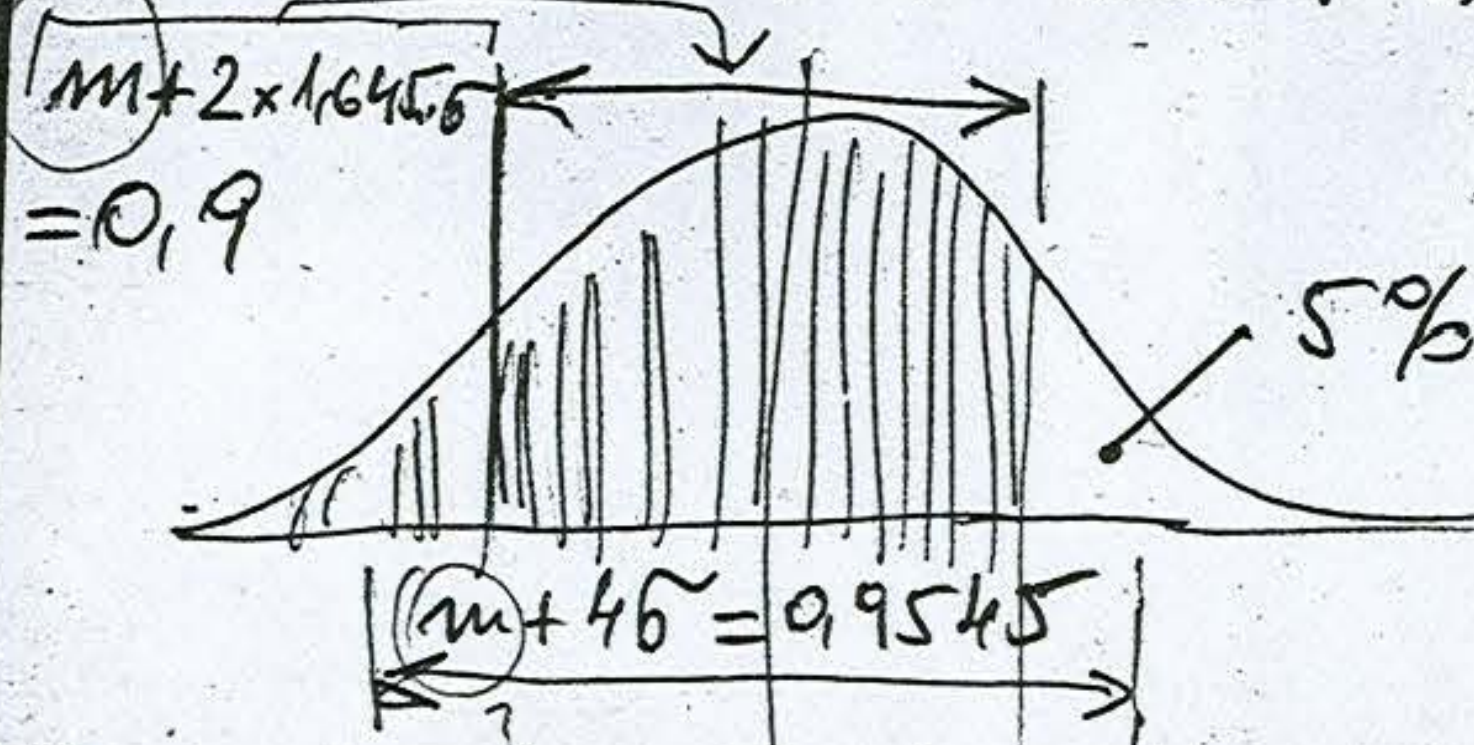
1. esete

$$1 - 0,8413 = 0,1587$$

$$2 \times 0,1587 = 0,3174 (=) 31,74\%$$

$$100 - 31,74 = 68,26\%$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,76	0,9608	1,96	0,9750	2,32	0,9898	2,72	0,9967
1,77	0,9616	1,97	0,9756	2,34	0,9904	2,74	0,9969
1,78	0,9625	1,98	0,9761	2,36	0,9909	2,76	0,9971
1,79	0,9633	1,99	0,9767	2,38	0,9913	2,78	0,9973
1,80	0,9641	2,00	0,9772	2,40	0,9918	2,80	0,9974
1,81	0,9649	2,02	0,9783	2,42	0,9922	2,82	0,9976
1,82	0,9656	2,04	0,9793	2,44	0,9927	2,84	0,9977
1,83	0,9664	2,06	0,9803	2,46	0,9931	2,86	0,9979
1,84	0,9671	2,08	0,9812	2,48	0,9934	2,88	0,9980
1,85	0,9678	2,10	0,9821	2,50	0,9938	2,90	0,9981
1,86	0,9686	2,12	0,9830	2,52	0,9941	2,92	0,9982
1,87	0,9693	2,14	0,9838	2,54	0,9945	2,94	0,9984
1,88	0,9699	2,16	0,9846	2,56	0,9948	2,96	0,9985
1,89	0,9706	2,18	0,9854	2,58	0,9951	2,98	0,9986
1,90	0,9713	2,20	0,9861	2,60	0,9953	3,00	0,9986
1,91	0,9719	2,22	0,9868	2,62	0,9956	3,02	0,9987
1,92	0,9726	2,24	0,9875	2,64	0,9959	3,04	0,9988
1,93	0,9732	2,26	0,9881	2,66	0,9961	3,06	0,9989
1,94	0,9738	2,28	0,9887	2,68	0,9963	3,08	0,9990
1,95	0,9744	2,30	0,9893	2,70	0,9965		



2. esete =

$$100,00 - 97,72$$

$$\Delta = 2,28\%$$

$$2 \times 2,28 \approx 4,55$$

$$\frac{4,55}{100} = 0,0455$$

$$1,0 - 0,0455 = 0,9545$$

A normal eloszlás szimmetrikus, ezért mind az alsó 5%-os alulmaradása is igaz.

1,96x0 esete: Valószínűségi szint = 95% (alul és felül)

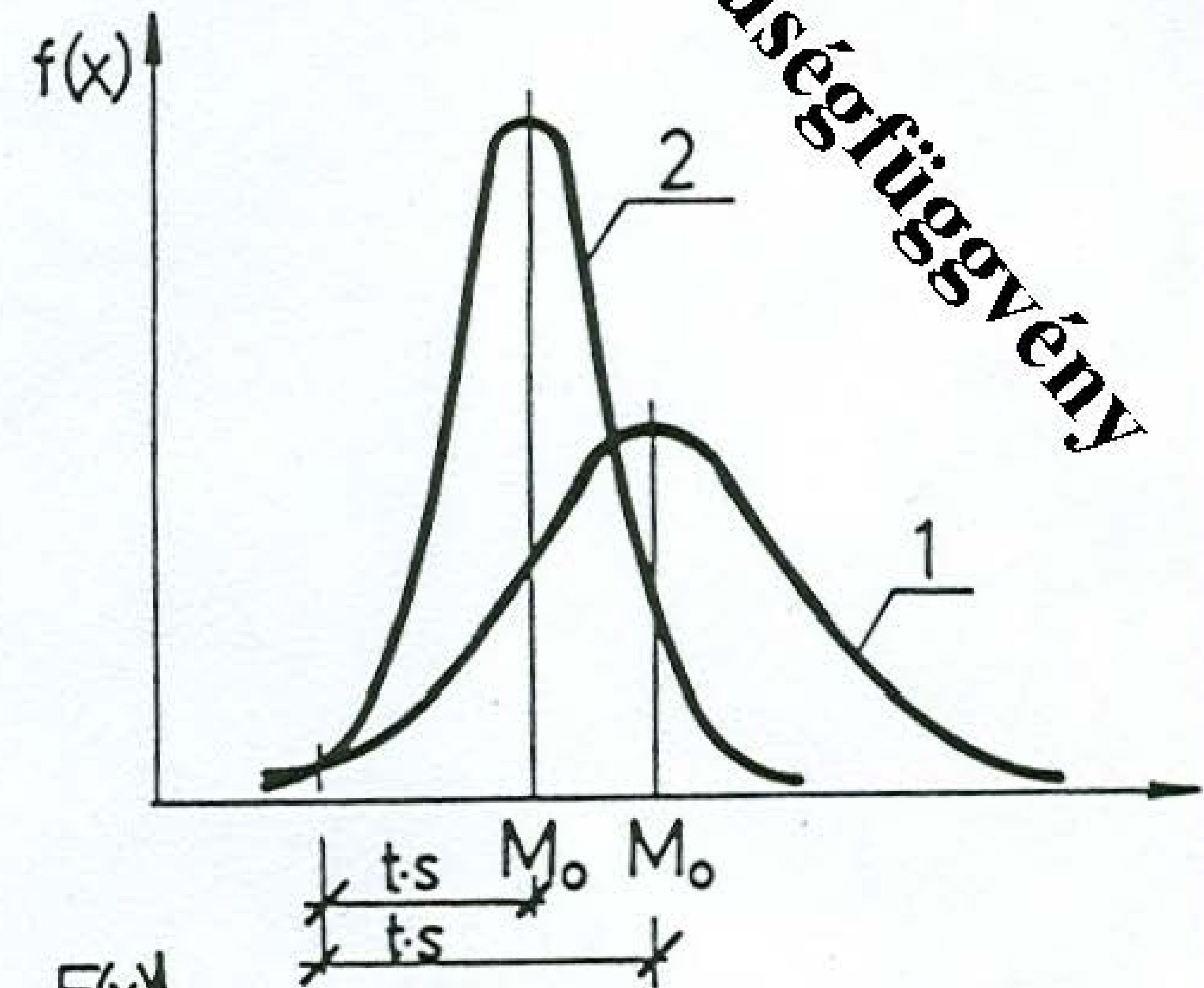
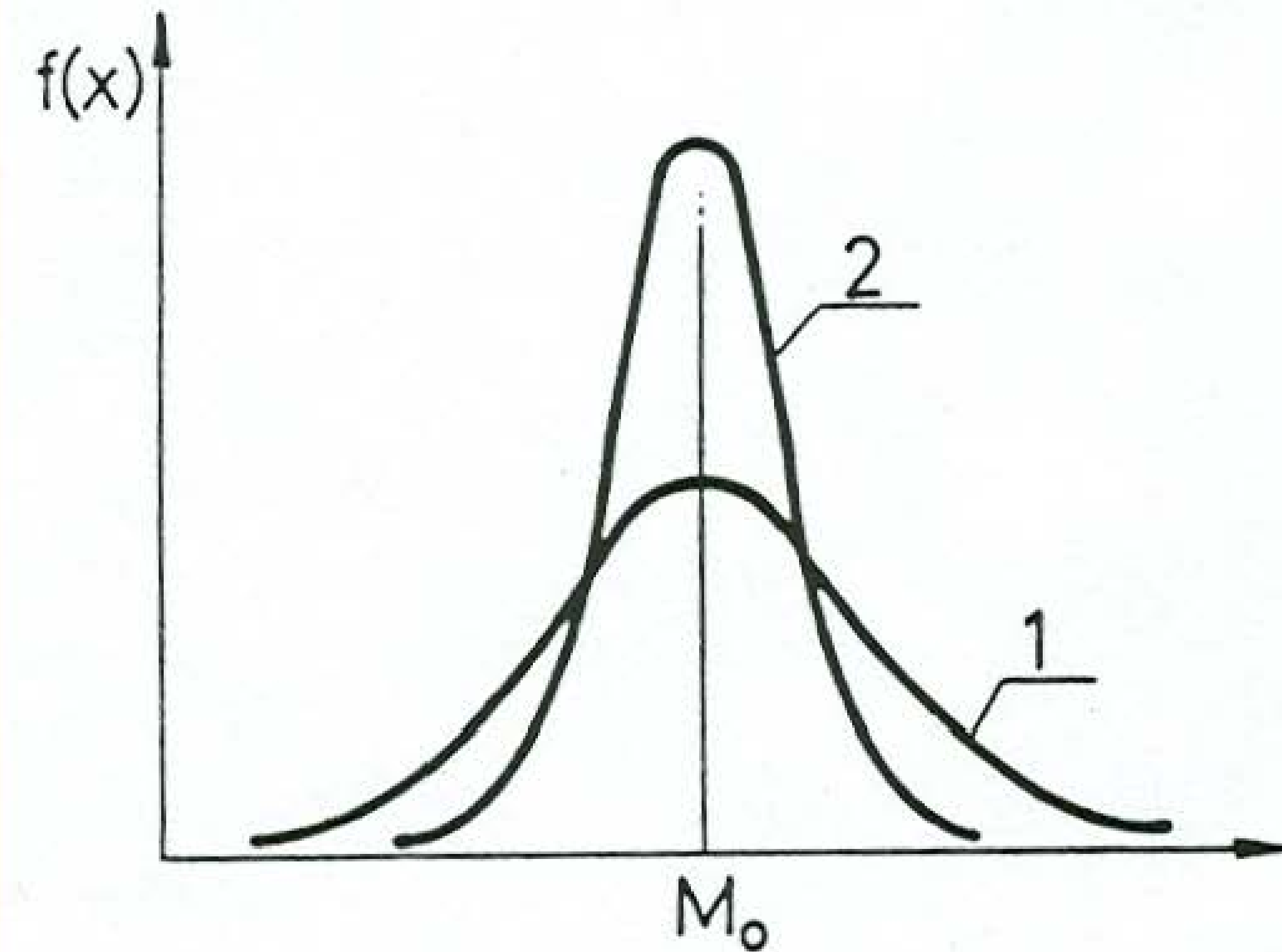
Ha az építőanyagok tulajdonságait valószínűségi változóként fogjuk fel, akkor megfelelőségüket általában az 5 %-os alsó küszöbértékük alapján ítéljük meg.

Kérdés, hogy az építőmérnök a valószínűségi eloszlás **felső küszöbértékét** használja-e a méretezés során?

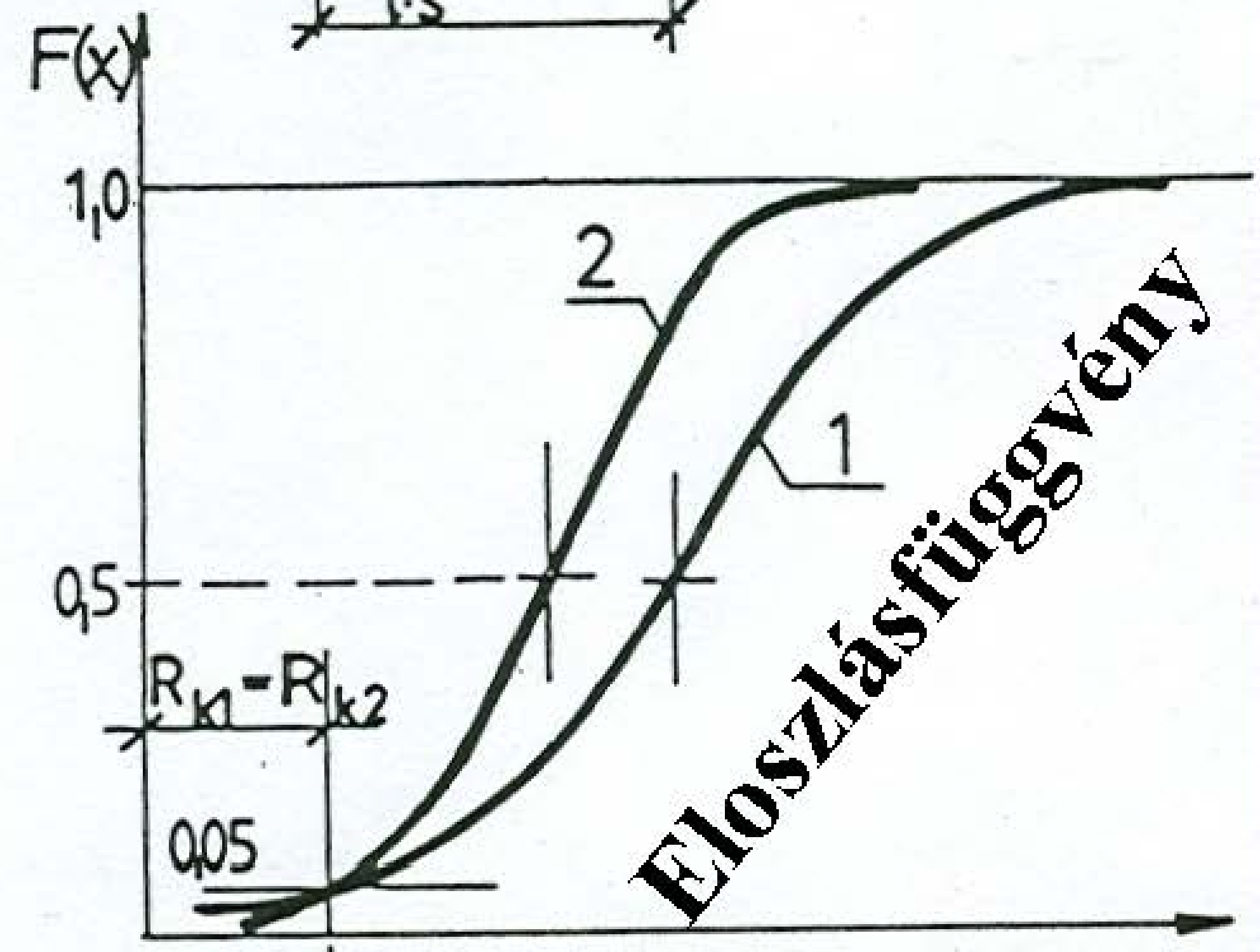
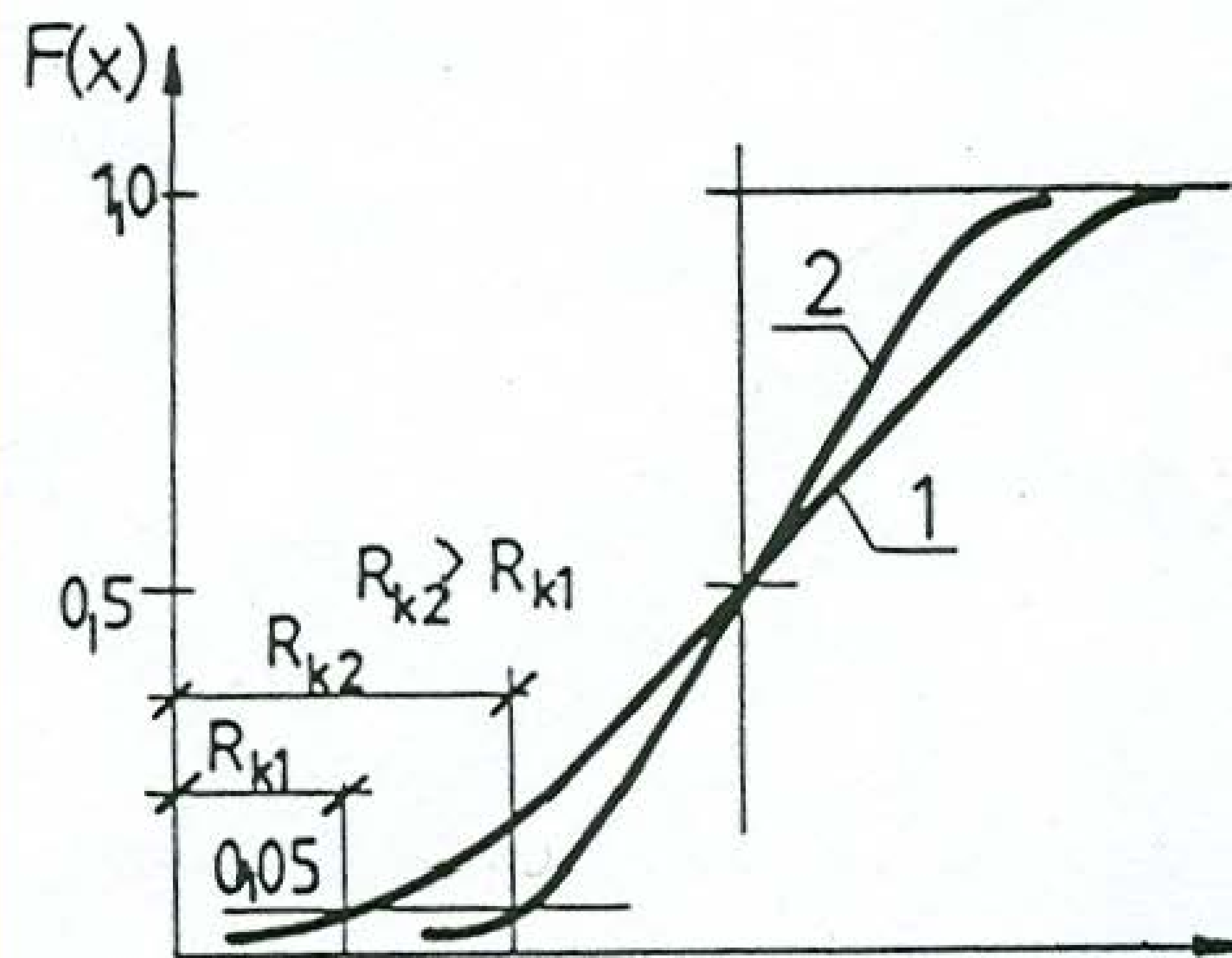
A válasz: *Igen.* A **hatásokat** (például szélteher, hóteher, földemek terhe, vízépítésben a legmagasabb vízszint stb.) általában **felső küszöbértékükkel** szokás figyelembe venni.

Említettük, hogy a *Gauss* függvény megadásához elég a várhatóérték (m) és a szórás (σ) ismerete.

Az elméleti várhatóérték (m) a *Gauss* görbe helyét, az elméleti szórás (σ) a *Gauss* görbe terjedelmét (terpesztését) határozza meg.



Sűrűségfüggvény



Eloszlásfüggvény

5%-os kockázathoz tartozó küszöbérték

Néhány fogalom (1)

- **Alulmaradási hányad:** Az előzőekben említett görbe alatti terület (0,05, illetve 5 %) neve.

Meghatározás: A teljes tételben a megfelelőségi feltételt ki nem elégítő rész részaránya.

- **Alulmaradási tényező:** Az előzőekben szerepelt 1,645 vagy más értékű szorzó.

Meghatározás: Szorzó, amellyel a szórást megszorozva, és a szorzatot a várhatóértékből (az átlagból) kivonva, a küszöbértékre jutunk. Jele általában: λ_n . Ilyen a későbbiekben tárgyalásra kerülő t_n Student tényező is.

- **Alulmaradási tágasság:** Az alulmaradási tényező és a szórás szorzata.

Meghatározás: Az alulmaradási tágasságot a várhatóértékből (az átlagból) kivonva a küszöbértéket (*jellemző értéket, karakterisztikus értéket*) kapjuk. Más szóval a várhatóérték (az átlag) és a küszöbérték különbsége. Jele a tapasztalati szórás esetén általában:

$$\lambda_n \cdot s$$

Néhány fogalom (2)

- **Valószínűségi változó:** A *független változó* elnevezése a matematikai statisztikában. Jele: ξ (kszi) vagy x
- **Várhatóérték:** A tapasztalati átlagnak (számtani középértéknek) megfelelő elméleti fogalom a matematikai statisztikában, tehát a valószínűségi változó várhatóértéke, amely a p' gyakoriságfüggvény alatti területnek az ordinátatengelyre vett elsőrendű nyomatéka:

$$M(\xi) = \int \xi \cdot p' \cdot d\xi$$

- Jele: $M(\xi)$ vagy m
- **Átlag (számtani átlag):** A várhatóérték elnevezése, ha nem elméleti, hanem tapasztalati érték. A mindennapok gyakorlatából ismert fogalom. Jele például: $\bar{x}$
- **Szórás:** A valószínűségi változó felvett értéke (ξ) és várhatóértéke ($M(\xi)$ vagy m) közötti eltérés négyzetének várhatóértékéből vont négyzetgyök:

$$D(\xi) = \sqrt{M((M(\xi) - \xi)^2)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (m - \xi_i)^2}{n}}$$

Jele: $D(\xi)$ vagy σ

A szórás lehet *elméleti szórás*, vagy *tapasztalati szórás*. A fenti képlet és jel az elméleti szórás képlete, illetve jele. A tapasztalati szórást s -sel szokták jelölni.

Szórás meghatározása

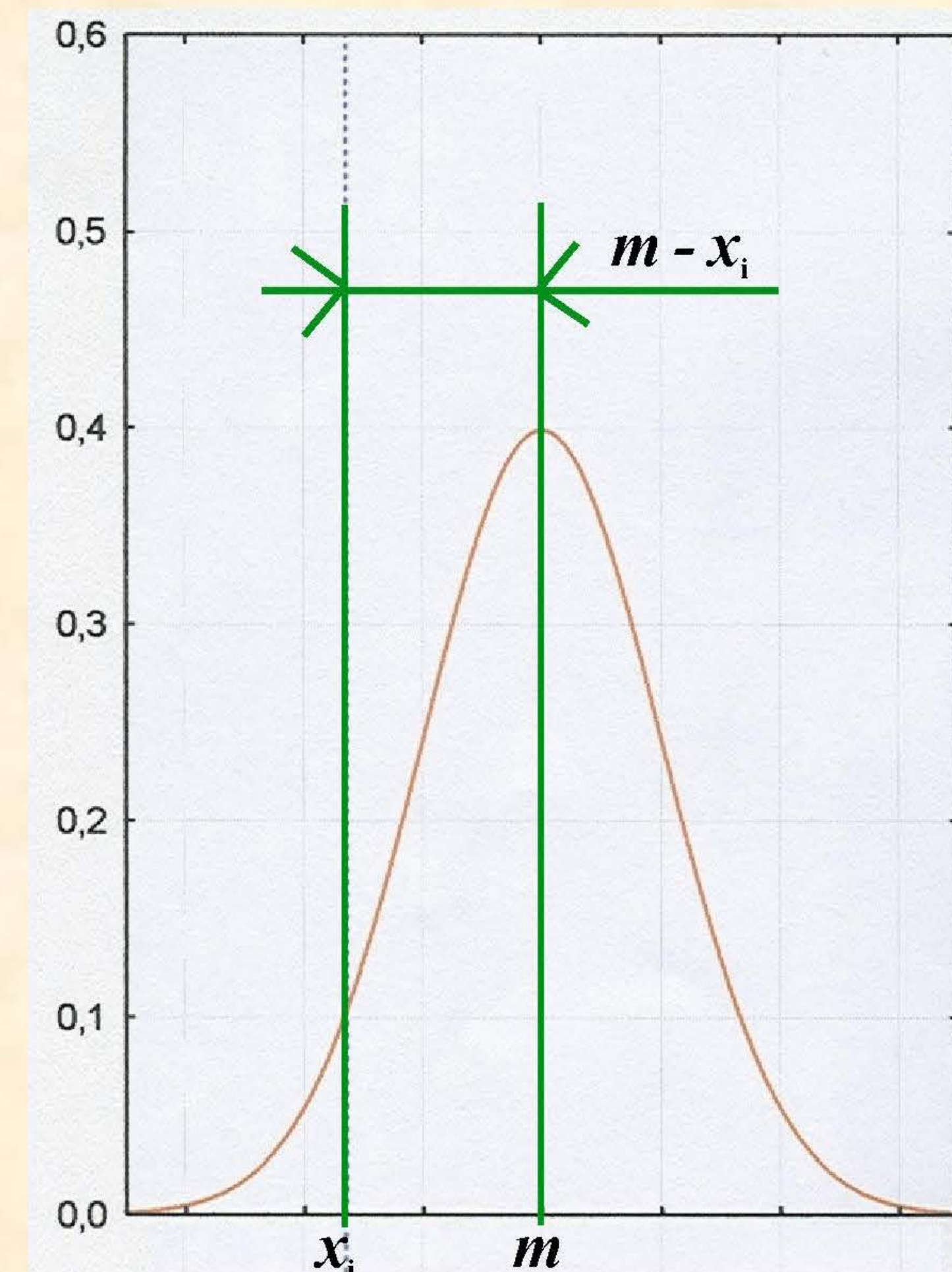
Az **elméleti szórást** úgy határozzuk meg, hogy

1. minden mérési eredményre (x_i) képezzük a várhatóérték (m) az egyes mérési eredmények (x_i) különbségét: $(m - x_i)$, és ezt eltérésnek* nevezzük,
2. ezeket a különbségeket négyzetre emeljük: $(m - x_i)^2$, ezek neve eltérésnégyzet*,
3. a négyzet értékeket összegezzük: $\Sigma(m - x_i)^2$, ezt eltérésnégyzetösszegnek* hívjuk,
4. és az elméleti szórás esetén az eltérésnégyzetösszeget* elosztjuk az n mintaelemszámmal: $(\Sigma(m - x_i)^2)/n$,
5. majd a hányadosból négyzetgyököt vonunk:

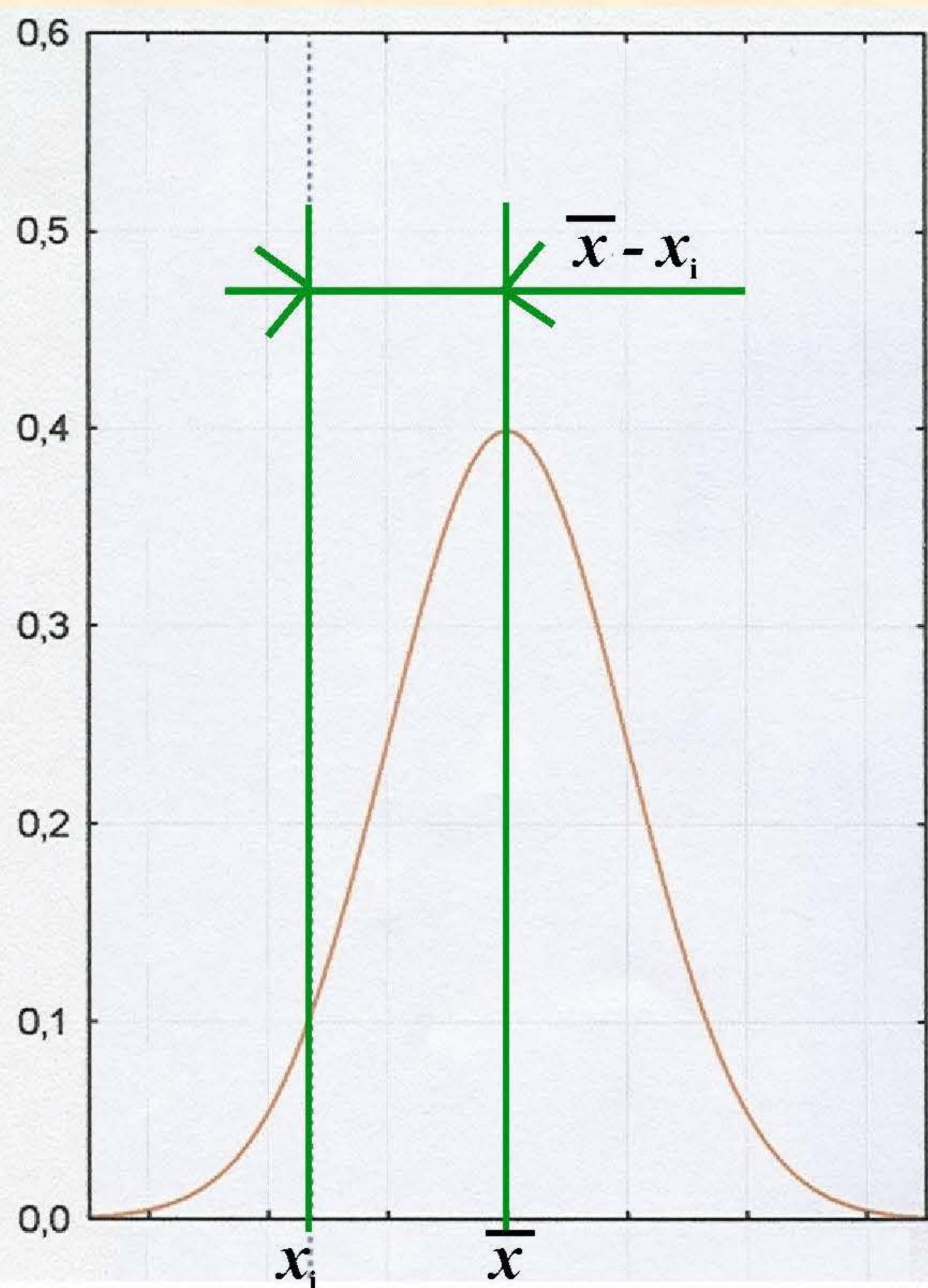
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (m - x_i)^2}{n}}$$

Az elméleti szórás számításának feltétele, hogy $n \rightarrow \infty$.

- **Megjegyzés:** Amit itt „eltérés”-nek hívunk, azt a regresszió számításnál „hiba”-nak nevezzük!



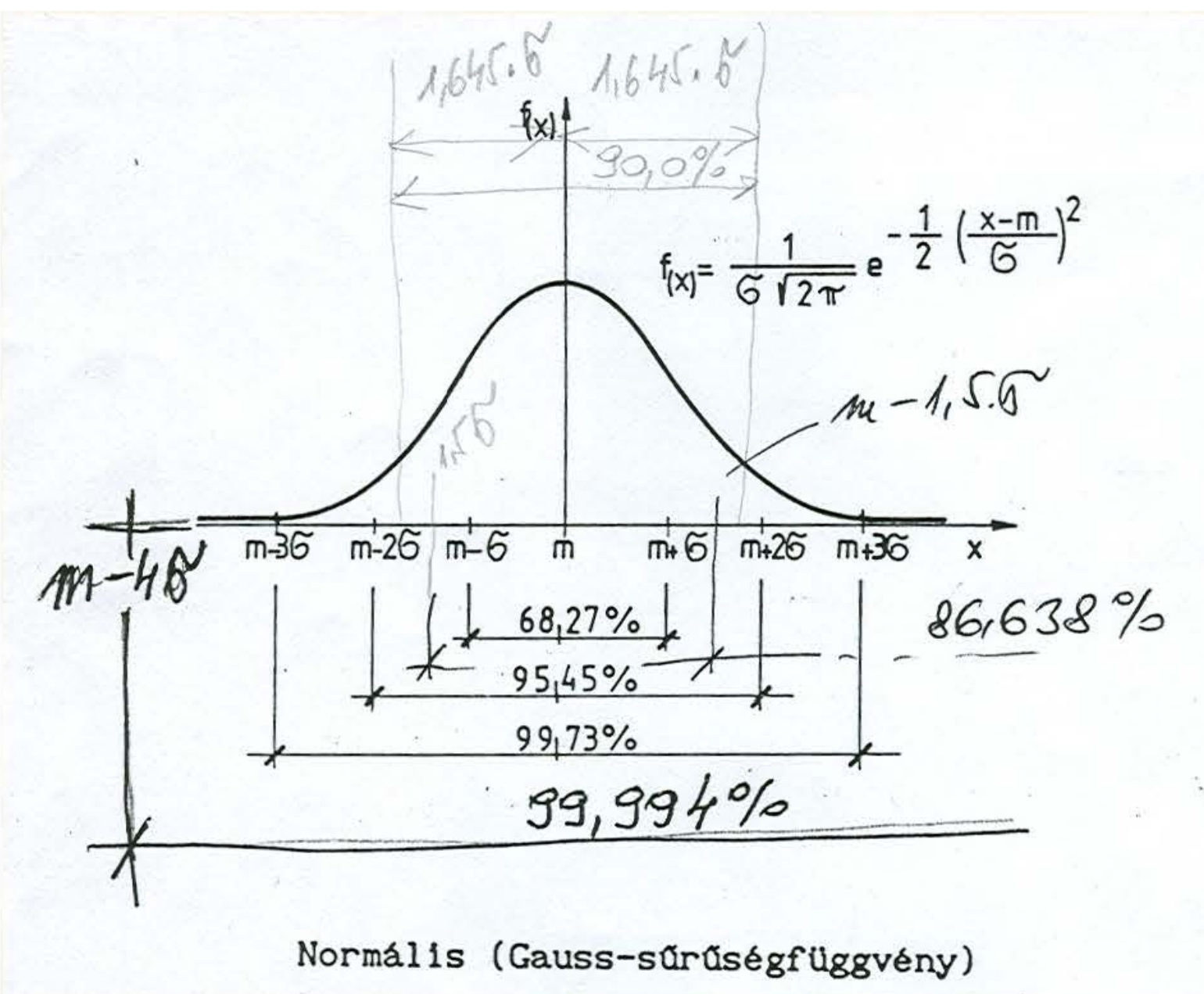
A gyakorlatban az $n \rightarrow \infty$ feltétel nem teljesül, az n a gyakorlatban általában egy nagyon kis szám, és ezt a **tapasztalati szórás** számítása során figyelembe kell venni. Ez úgy történik, hogy az eltérésnégyzetösszeget nem n -nel, hanem $(n-1)$ -gyel kell elosztani, tehát a **tapasztalati (empirikus, korrigált) szórás (s)** értéke:



$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}}$$

*Mennél kisebb az n értéke, annál jobban eltér az $(n-1)/n$ hányados az 1-től, azaz adott eltérésnégyzetösszeg esetén minél kisebb az n mintaelemszám, – a $\sqrt{[(n-1)/n]}$ aránynak megfelelően – annál **nagyobb** a **tapasztalati szórás (s)**, és ennek folytán **kisebb küszöbérték** adódik.*

Ez már csak azért is így van, mert ha az n értéke csökken, akkor nem csak a szórás (s), hanem az alulmaradási tényező (λ_n) is megnő, és ezáltal az alulmaradási tágasság ($\lambda_n \cdot s$) növekedésének már oka is van.



A **Gauss**-féle sűrűségfüggvény ábrán (emlékeztetésül itt balra látszik lekicsinyítve) bemutatott **elméleti törvényszerűségek** akkor igazak, ha $n \rightarrow \infty$, illetve gyakorlatilag több mint 40, azaz $n > 40$ (n = mintaelem szám).

Ha $n \rightarrow \infty$ (azaz n tart a végtelenhez), akkor

- a **gyakorisági hisztogram** és a **gyakorisági polinom** $\rightarrow$ a **gyakorisági görbéhez** (azaz a gyakorisági hisztogram és a gyakorisági polinom tart a gyakorisági görbéhez);
- a **tapasztalati átlag** ($\bar{x}$) $\rightarrow$ tart az **elméleti átlaghoz**, amit **várhatóértéknek** hívunk (m);
- a **tapasztalati szórás** (s) $\rightarrow$ tart az **elméleti szóráshoz** (σ).

A laboratóriumi mérési (vizsgálati) eredményekből a **tapasztalati átlagot** és a **tapasztalati szórást** tudjuk kiszámítani, ezekből az **elméleti átlagra** (várhatóértékre) és az **elméleti szórásra** csak következtetni tudunk, és a mérési eredményekből a **küszöbértéket** (jellemző értéket, **karakterisztikus értéket**) a vonatkozó **termékszabvány** előírása alapján határozzuk meg.

Tételezzük fel például, hogy egy hatalmas doboz (mondjuk akkora, mint a Műegyetem aulája) tele van egyforma, de különböző, fekete, fehér színű golyóval (például pingpong labdával), amelyek a hatalmas dobozban véletlenszerűen helyezkednek el, és amelyek arányát nem ismerjük.



Vegyünk mintát képzeletben a hatalmas dobozból például egy kis szakajtóval (kenyértészta kelesztésére való fületlen kosárkával), számoljuk meg a mintában lévő fekete és fehér golyókat, és tegyük fel a kérdést: Mi a valószínűsége annak, hogy a mintában lévő fekete és fehér golyók aránya ugyanaz, mint a hatalmas doboz halmazában?

Könnyű elképzelni, hogy vizsgálódásunk megbízhatósága annál nagyobb lesz, minél nagyobb a szakajtónk, azaz minél nagyobb a mintában lévő golyók n mintaelem száma. Teljes bizonyossággal azonban csak akkor tudnánk a kérdésre válaszolni, ha a hatalmas dobozban lévő valamennyi golyót megvizsgálnánk. A gyakorlatban erre persze nincs lehetőségünk, de az n mintaelemszám növelésére törekednünk kell.²²

A vizsgálati minta **n elemszáma** a vizsgálatnak nagyon fontos jellemzője, mert jelentősen befolyásolja a vizsgálati eredmények értékelésével végzett termék-minősítés megbízhatóságát.

Az **n mintaelemszámot** a vizsgálati (mérési) eredmények értékelése során a ***Student*-féle eloszlás** (nevezik ***t*-eloszlásnak** is) alkalmazásával lehet figyelembe venni.

A *Student* eloszlás jellegzetessége, hogy az **n mintaelemszámnak** is függvénye, és

ha $n \rightarrow \infty$, akkor

a *Student* görbe egyre jobban megközelíti a *Gauss* görbét, azaz

***Student* görbe $\rightarrow$ *Gauss* görbe**

A *Student*-eloszlást **William Sealy Gosset** (Canterbury, Kent, 1876. június 13. – Beaconsfield, Buckinghamshire, 1937. október 16.) angol statisztikus írta fel, és 1908-ban *Student* álnéven publikálta.

W. S. Gosset 1908-ban



W. S. Gosset a híres, 1382-ben alapított Winchester College magángimnázium oxfordi kollégiumában kémiát és matematikát tanult, majd 1899-ben az ír *Arthur Guinness* (1725. szeptember 24. – 1803. január 23.) és fia világhírű dublini sörfőzdéjében helyezkedett el. Itt dolgozta ki matematikai statisztikai módszerét az árpa minőség vizsgálati eredmények megbízhatóságának megítélésére. Minthogy korábban egy másik munkatárs publikációjával kárt okozott a sörfőzdének, megtiltották az alkalmazottaknak, hogy tanulmányokat tegyenek közzé. Ez az oka annak, hogy *W. S. Gosset* álnéven írt.

A történethez tartozik, hogy *Gosset* nagyon jó munkakapcsolatba került az élettani laboratórium vezetőjével, *Karl Pearson* angol matematikussal (1857. március 27. – 1936. április 27.), a χ^2 -eloszlás és a korrelációs együttható kidolgozójával, akitől sokat tanult. A *Student*-féle eloszlás jelentőségét mégsem *K. Pearson*, hanem *Ronald Aylmer Fisher* (1890. február 17. – 1962. július 29.) angol genetikus és statisztikus, az *F*-eloszlás vagy *Fisher*-eloszlás kidolgozója ismerte fel.

W. S. Gosset 1908-ban a *Student*-féle eloszlást a „*t*” betűvel jelölte, ezért azt ***t*-eloszlásnak** is nevezzük.

A *Student*-féle vagy *t*-eloszlás sűrűségfüggvényének alakja:

$$f_{(n-1)}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi \cdot (n-1)}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{(n-1)}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

ahol Γ a gamma-eloszlást jelöli:

$$\Gamma_{(n)}(t) = \int_0^{\infty} t^{n-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$$

ahol $t = -\log x$ és

$$\Gamma_{(n+1)} = n \cdot \Gamma_{(n)}$$

$$\Gamma_{(1)} = 1$$

$$\Gamma_{(n)} = (n-1)!$$

**Az egyoldali 5 %-os alulmaradási hányadhoz tartozó *Student* tényező (t_n),
50 %-os elfogadási valószínűség mellett
(*Stange, K. – Henning, H.-J.*, 1966)**

Mintaelem szám n	Szabadság- fok $n - 1$	<i>Student</i> - tényező t_n
2	1	6,314
3	2	2,920
4	3	2,353
5	4	2,132
6	5	2,015
7	6	1,943
8	7	1,895
9	8	1,860
10	9	1,833
11	10	1,812

Mintaelem szám n	Szabadság- fok $n - 1$	<i>Student</i> - tényező t_n
12	11	1,796
13	12	1,782
14	13	1,771
15	14	1,761
20	19	1,729
30	29	1,699
35	34	1,691
100	99	1,660
500	499	1,648
	∞	1,645

Esetünkben a *Student*-tényező az $N(0,1)$ eloszlású t -eloszlás — egyoldali 5 %-os alulmaradási hányadához tartozó — t_n valószínűségi változója ($p = 0,05$ értékhez tartozó kvantilise, küszöbértéke).

Fogalommeghatározás (3)

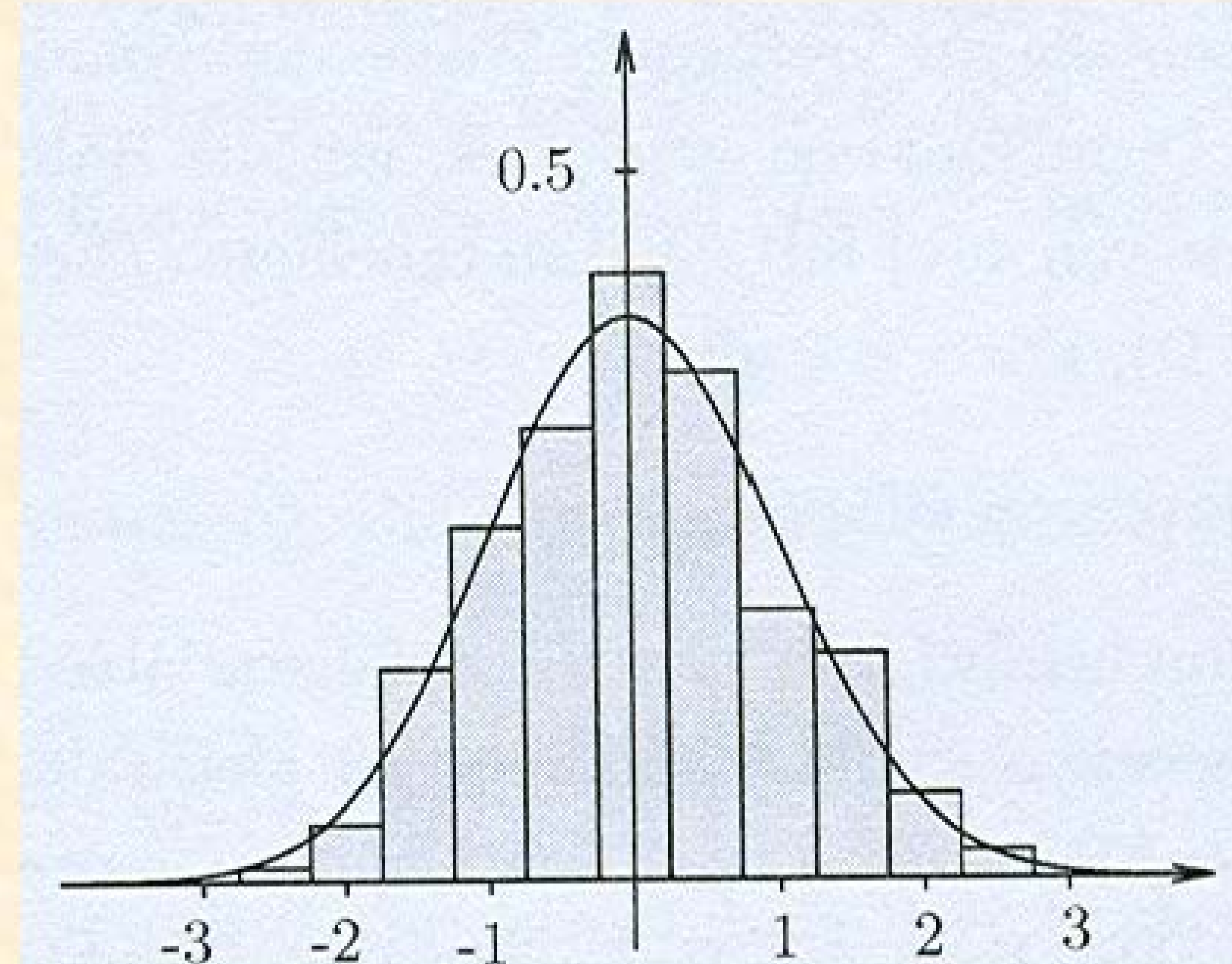
Standardizált valószínűségi változó:

A ξ valószínűségi változó standardizáltja:

$$\xi_{sta} = \frac{M(\xi) - \xi}{D(\xi)}$$

azaz képezni kell az $M(\xi)$ várhatóérték és a ξ valószínűségi változó különbségét, amelyet eltérésnek neveztünk (ezáltal a függvényt az origóba toljuk), és el kell osztani a $D(\xi)$ szórással. Ez tulajdonképpen függvény-transzformáció.

**A standardizált valószínűségi függvény
várhatóértéke: 0, szórása: 1.**



Graf / Henning / Stange

Formeln und Tabellen

der mathematischen Statistik

Zweite völlig neu bearbeitete Auflage

von

Kurt Stange und Hans-Joachim Henning

Dr. phil.
o. Professor der Technischen Hochschule
Aachen
Institut für Statistik
und Wirtschaftsmathematik

Dr. phil.
Deutsches Wollforschungsinstitut
an der Technischen Hochschule
Aachen

Mit 78 Abbildungen



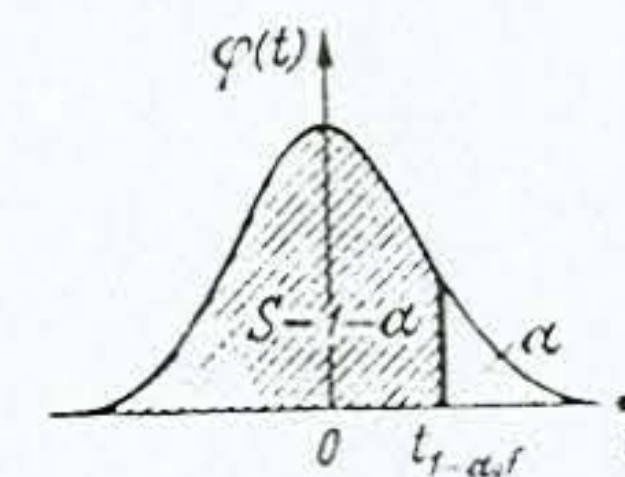
Springer-Verlag
Berlin / Heidelberg / New York

1966

Tabelle C 4.1 Schwellenwerte $t_{1-\alpha; f}$ der t -Verteilung zur statistischen Sicherheit $S = 1 - \alpha$ (bei einseitiger Abgrenzung) in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f

$$t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$$

MSZ 4720-2



Freiheitsgrad f	Statistische Sicherheit $S = 1 - \alpha$							Freiheitsgrad f
	90 %	95 %	97,5 %	99 %	99,5 %	99,9 %	99,95 %	
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6	1
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60	2
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21	12,92	3
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	4
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	5
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	6
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	8
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	9
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	10
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	11
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	12
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	13
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	14
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	15
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	16
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	17
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	18
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	19
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	20
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819	21
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	22
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768	23
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	24
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	25
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	26
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	27
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	28
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	29
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	30
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	40
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	50
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	60
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	80
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	100
200	1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	200
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	500
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	∞

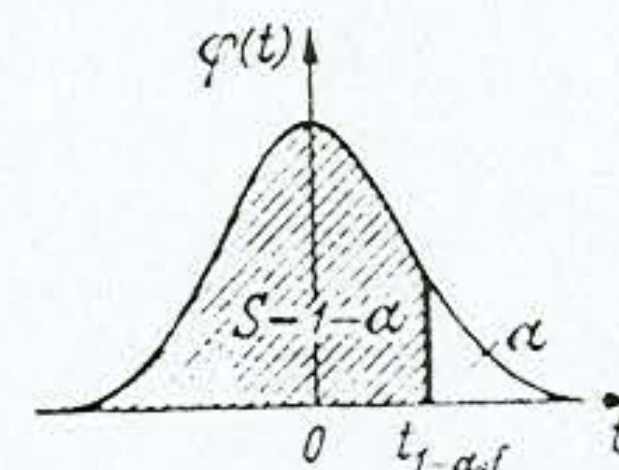
¹ Tab. C 4 und C 5 nach E. T. FEDERIGHI: Extended tables of the percentage points of Student's t -distribution. J. Am. Stat. Ass. 54, 1959, S. 683.

Standardizált eloszlásfüggvény 100 %-ból kivont ordinátája. Például 95 %, ha a standardizált eloszlásfüggvény ordinátája $p\% = 5\%$, vagy 97,5 %, ha $p\% = 2,5\%$ stb.

Ez a sor az $f = 4$ szabadság fokú ($n = 5$) standardizált *Student*-féle eloszlásfüggvény abszcisszáit (t) adja. Például $t_{n=5} = 2,132$ esetén $p\% = 5\%$, vagy $t_{n=2,5} = 2,776$ esetén $p\% = 2,5\%$ stb.

Ez a sor ($f = \infty$) a standardizált *Gauss*-féle eloszlásfüggvény abszcisszáit adja. Például $t_{\infty} = 1,645$ esetén $p\% = 5\%$, vagy $t_{\infty} = 1,960$ esetén $p\% = 2,5\%$ stb.

Tabelle C 4.1 Schwellenwerte $t_{1-\alpha;f}$ der t -Verteilung zur statistischen Sicherheit $S = 1 - \alpha$ (bei einseitiger Abgrenzung) in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f



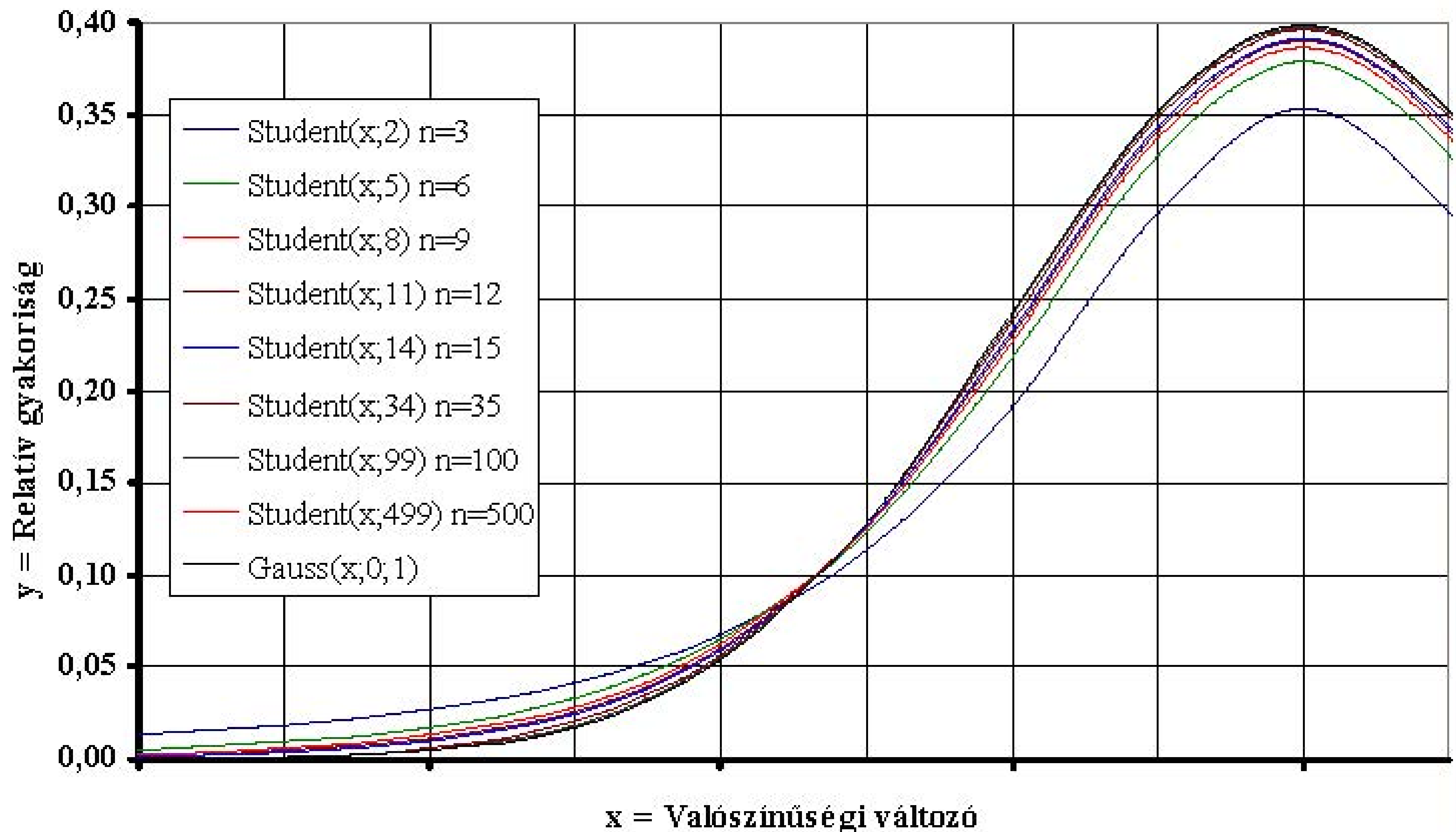
$$t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$$

MSZ 4720-2

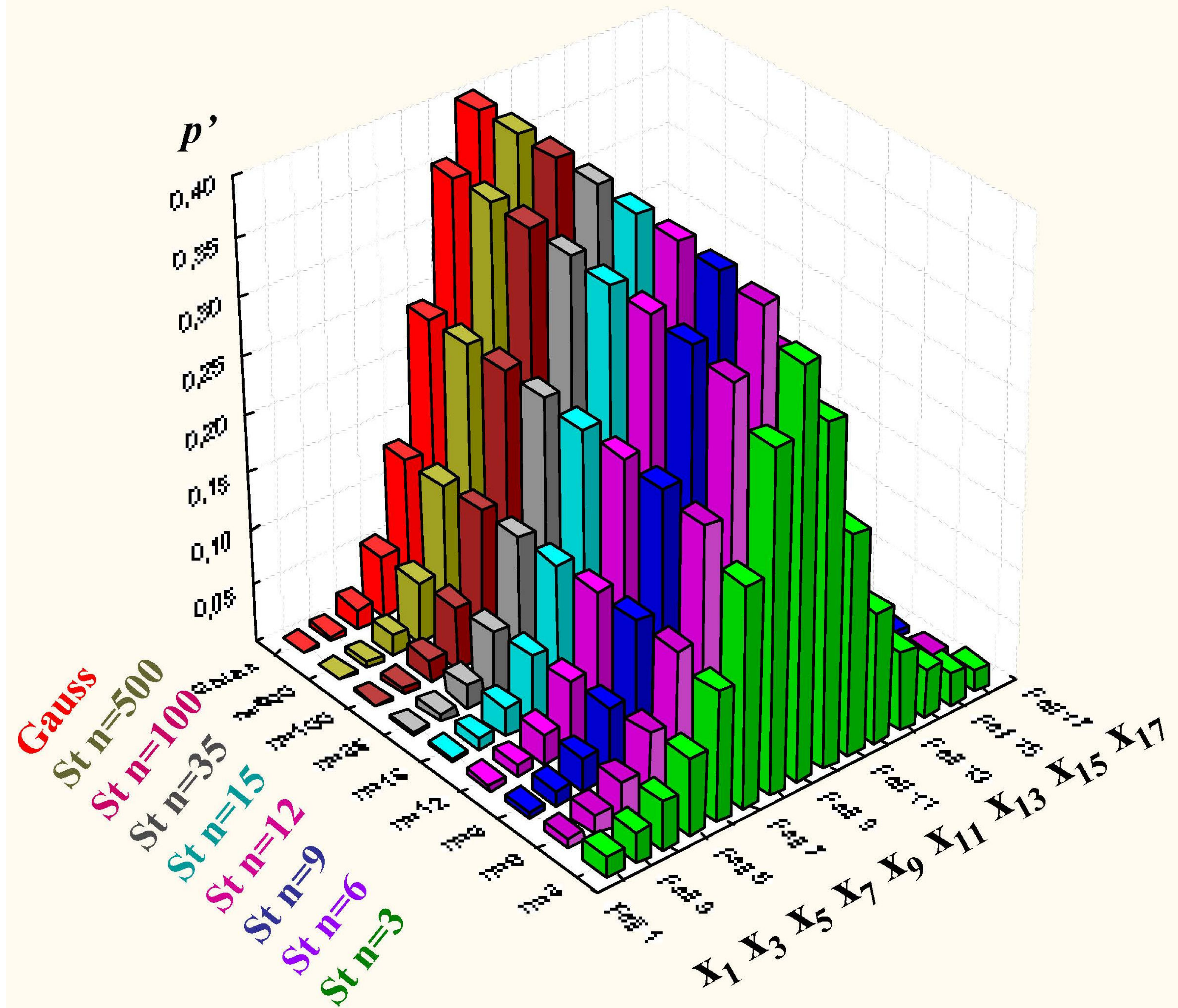
Freiheitsgrad f	Statistische Sicherheit $S = 1 - \alpha$							Freiheitsgrad f
	90 %	95 %	97,5 %	99 %	99,5 %	99,9 %	99,95 %	
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6	1
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60	2
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21	12,92	3
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	4
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	5
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	6
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	8
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	9
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	10
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	11
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	12
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	13
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	14
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	15
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	16
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	17
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	18
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	19
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	20
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819	21
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	22
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768	23
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	24
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	25
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	26
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	27
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	28
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	29
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	30
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	40
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	50
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	60
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	80
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	100
200	1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	200
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	500
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	∞

$p\% = 10 \quad 5 \quad 2,5 \quad 1 \quad 0,5 \quad 0,1 \quad 0,05 \%$

**Ha $n \rightarrow \infty$, akkor *Student* görbe $\rightarrow$ *Gauss* görbe
(sűrűségfüggvények bal oldala)**



Gauss- és Student-eloszlások standardizált sűrűségfüggvénye



Gauss- és Student-eloszlások standardizált sűrűségfüggvényének (az előző oldalon lévő térbeli hisztogram) adatai (p' ordináták)

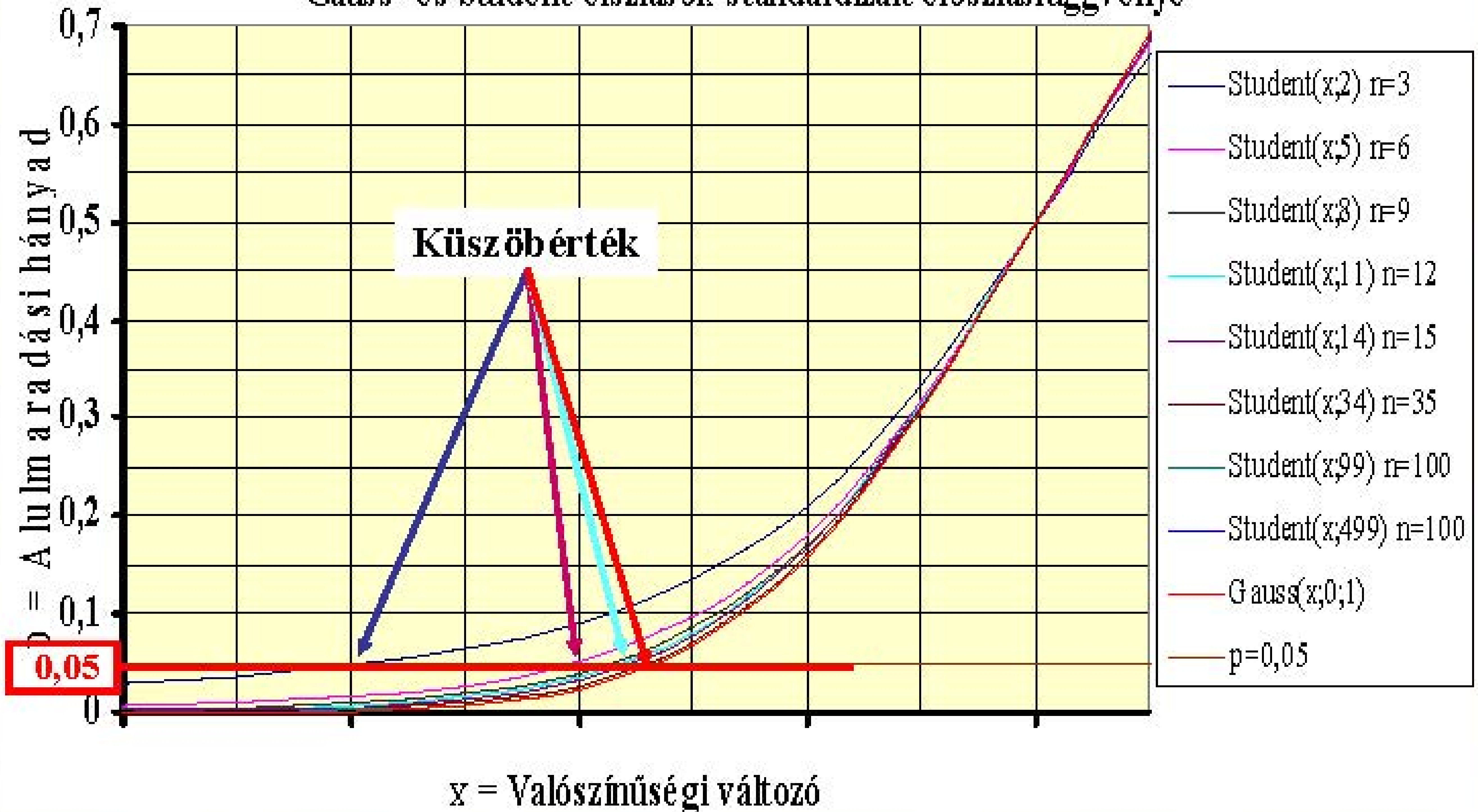
STATISTICA - [Sequentielle-sűrűség.stg*]									
Catei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Layouts Extras Fenster ? [Icons] Zur Arbeitsmappe Zum Bericht [Icons]									
% P/L Berechnete Grafik-Daten... Plot hinzufügen... [Icons]									
	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell
	n=3	n=6	n=9	n=12	n=15	n=35	n=100	n=500	Gauss
x1 = -4,0	0,01309457	0,005123727	0,002756306	0,00178331	0,001290364	0,000464112	0,000222168	0,00013383	0,00013383
x2 = -3,5	0,018589928	0,009244354	0,005920595	0,004373927	0,003512787	0,001816113	0,001165661	0,000872683	0,000872683
x3 = -3,0	0,027410122	0,017292579	0,013009418	0,010795166	0,009465921	0,006499804	0,005133166	0,004431848	0,004431848
x4 = -2,5	0,042200644	0,033326239	0,028781348	0,026222537	0,024599933	0,020663089	0,018640943	0,0175283	0,0175283
x5 = -2,0	0,068041382	0,06509031	0,062368085	0,060654323	0,059508341	0,056543839	0,054917641	0,053990967	0,053990967
x6 = -1,5	0,114134412	0,124517345	0,126771205	0,127677403	0,12815082	0,129035153	0,129366407	0,129517596	0,129517596
x7 = -1,0	0,19245009	0,219679797	0,22760758	0,231377879	0,233580824	0,238455562	0,240753778	0,241970725	0,241970725
x8 = -0,5	0,296296296	0,327918531	0,336693898	0,340795755	0,343170658	0,34836792	0,350790109	0,352065327	0,352065327
x9 = 0,0	0,353553391	0,37960669	0,386699021	0,389989757	0,391887456	0,396020059	0,397936138	0,39894228	0,39894228
x10 = +0,5	0,296296296	0,327918531	0,336693898	0,340795755	0,343170658	0,34836792	0,350790109	0,352065327	0,352065327
x11 = +1,0	0,19245009	0,219679797	0,22760758	0,231377879	0,233580824	0,238455562	0,240753778	0,241970725	0,241970725
x12 = +1,5	0,114134412	0,124517345	0,126771205	0,127677403	0,12815082	0,129035153	0,129366407	0,129517596	0,129517596
x13 = +2,0	0,068041382	0,06509031	0,062368085	0,060654323	0,059508341	0,056543839	0,054917641	0,053990967	0,053990967
x14 = +2,5	0,042200644	0,033326239	0,028781348	0,026222537	0,024599933	0,020663089	0,018640943	0,0175283	0,0175283
x15 = +3,0	0,027410122	0,017292579	0,013009418	0,010795166	0,009465921	0,006499804	0,005133166	0,004431848	0,004431848
x16 = +3,5	0,018589928	0,009244354	0,005920595	0,004373927	0,003512787	0,001816113	0,001165661	0,000872683	0,000872683
x17 = +4,0	0,01309457	0,005123727	0,002756306	0,00178331	0,001290364	0,000464112	0,000222168	0,00013383	0,00013383

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor *Student* görbe $\rightarrow$ *Gauss* görbe

(eloszlásfüggvények bal széle)

és a 0,05 értékű (5 %-os) küszöbérték jobbra tolódik (nagyobb lesz)

Gauss- és Student-eloszlások standardizált eloszlásfüggvénye



Gauss- és Student-eloszlások standardizált eloszlásfüggvényének (az előző oldalon lévő térbeli hisztogram) adatai (p ordináták)

STATISTICA - [Sequentielle-eloszlás.stg*]									
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Layouts Extras Fenster ?									
Berechnete Grafik-Daten... Plot hinzufügen...									
	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell	3D-Sequentiell
	n=3	n=6	n=9	n=12	n=15	n=35	n=100	n=500	Gauss
x1 = -4,0	0,028595479	0,005161708	0,001974886	0,001043097	0,000658025	0,000161911	0,000061126	0,000036468	0,000031671
x2 = -3,5	0,036413675	0,008642216	0,004039541	0,002485145	0,001767604	0,000660458	0,000349532	0,000253471	0,000232629
x3 = -3,0	0,047732983	0,015049624	0,008535841	0,00603992	0,004775756	0,00251267	0,001707754	0,001417382	0,001349898
x4 = -2,5	0,06480586	0,02724505	0,018471018	0,014753187	0,012733332	0,008703222	0,007031297	0,006369608	0,006209665
x5 = -2,0	0,09175171	0,050969739	0,040258118	0,035401977	0,032643975	0,026769914	0,024119839	0,023020875	0,022750132
x6 = -1,5	0,136196561	0,096951839	0,086001646	0,080879009	0,077912659	0,071421982	0,068398408	0,067123406	0,066807201
x7 = -1,0	0,211324865	0,181608734	0,173296754	0,169400348	0,167140972	0,162187355	0,159874237	0,158897588	0,158655254
x8 = -0,5	0,333333333	0,319149436	0,315268038	0,31346311	0,312420958	0,310147949	0,309092322	0,308647745	0,308537539
x9 = 0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
x10 = +0,5	0,666666667	0,680850564	0,684731962	0,68653689	0,687579042	0,689852051	0,690907678	0,691352255	0,691462461
x11 = +1,0	0,788675135	0,818391266	0,826703246	0,830599652	0,832859028	0,837812645	0,840125763	0,841102412	0,841344746
x12 = +1,5	0,863803439	0,903048161	0,913998354	0,919120991	0,922087341	0,928578018	0,931601592	0,932876594	0,933192799
x13 = +2,0	0,90824829	0,949030261	0,959741882	0,964598023	0,967356025	0,973230086	0,975880161	0,976979125	0,977249868
x14 = +2,5	0,93519414	0,97275495	0,981528982	0,985246813	0,987266668	0,991296778	0,992968703	0,993630392	0,993790335
x15 = +3,0	0,952267017	0,984950376	0,991464159	0,99396008	0,995224244	0,99748733	0,998292246	0,998582618	0,998650102
x16 = +3,5	0,963586325	0,991357784	0,995960459	0,997514855	0,998232396	0,999339542	0,999650468	0,999746529	0,999767371
x17 = +4,0	0,971404521	0,994838292	0,998025114	0,998956903	0,999341975	0,999838089	0,999938874	0,999963532	0,999968329



EGY KIS JÁTÉK

**Ezt a horgászt 1998-ban
nagy szerencse érte,
mert óriási, 2 m hosszú
harcsát fogott.**

**Az év őszén arra kértem
55 főiskolai hallgatót, hogy
becsülje meg a hal súlyát.**

**Idézzük emlékezetünkbe, amit
a mértékegységek tárgyalása
során megbeszéltünk: az SI
mértékegységrendszerben
a *súly mértékegysége* N , a *kg*
pedig a tömeg mértékegysége.**

Az óriás harcsa becsült súlya, 1. oldal

Minta	Rendezett minta	Sorszám
500	180	1.
750	200	2.
1500	200	3.
200	200	4.
700	200	5.
650	250	6.
800	300	7.
800	300	8.
800	350	9.
540	400	10.
500	400	11.
540	450	12.
850	500	13.
700	500	14.
750	500	15.
1200	500	16.
400	500	17.
780	500	18.
870	540	19.
600	540	20.
200	540	21.
1000	570	22.
500	600	23.
500	600	24.
800	600	25.
800	630	26.
300	650	27.
800	650	28.

1998. szeptember 14-16-án 55 főiskolai hallgató
a bemutatott fényképről megbecsülte a 2 m hosszú harcsa **súlyát**

5 %-os alsó küszöb,
 $0,05 \cdot 55 = 2,75 \text{ N}$

Hisztogram

	Hétfő 14 óra, Menedzser 6. csoport
	Hétfő 16 óra, Menedzser 2. csoport
	Szerda 12 óra, Magasépítő 6. csoport
	Szerda 14 óra, Magasépítő 3. csoport
	Szerda 16 óra, Magasépítő 7. csoport

25 %-os alsó kvan-
tilis, $0,25 \cdot 55 = 13,75 \text{ N}$

Hisztogram

A hallgatók közül huszonnégyen a súly helyett
a tömeget adták meg,
ugyanis [kg]-ban fejezték ki a kért mennyiséget.
Ez a megkérdezett hallgatók 43,6 %-a.

A feltett kérdésre a helyes válasz:

A hal súlya körülbelül 450 N, mert a hal tömege 46 kg volt.

Súly = Tömeg * Nehézségi gyorsulás =

$$= 46 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/sec}^2 =$$

$$= 451,26 \text{ kg} \cdot \text{m/sec}^2 = 451,26 \text{ N}$$

Hisztogram

Medián = 650

A rendezett minta középső elemének értéke.

Az óriás harcsa becsült súlya, 2. oldal

Minta	Rendezett minta	Sorszám
600	650	29.
400	660	30.
540	700	31.
700	700	32.
500	700	33.
1100	700	34.
300	700	35.
950	720	36.
350	750	37.
720	750	38.
700	780	39.
180	800	40.
250	800	41.
810	800	42.
650	800	43.
1000	800	44.
800	800	45.
450	800	46.
600	810	47.
700	850	48.
630	870	49.
500	950	50.
570	1000	51.
650	1000	52.
660	1100	53.
200	1200	54.
200	1500	55.

Matematikai statisztikai jellemzők

A becsült értékek átlaga:	637,090909	N
A becsült értékek szórása:	263,724553	N
A becsült értékek ferdesége:	0,49453691	
A becsült értékek csúcsossága:	1,153008	

Tehát a hallgatók a harcsa súlyát jelentős szórással túlbecsülték, a ferdeség a nagy értékek irányába nyúló aszimmetrikus eloszlást jelez, az eloszlás a normális eloszláshoz viszonyítva csúcsos eloszlás.

75 %-os felső kvan-
tilis, $0,75 \cdot 55 = 41,25$

Hisztogram



Az óriás harcsa becsült súlya, 3. oldal

Valószínűségi változó, N	Valószínűség	Relatív valószínűség		
180	1	0,0182	Várhatóérték- 1,96 * szórás: 123,1 N	
200	2	0,0364	5 %-os alsó küszöb valószínűsége: 0,05*55=2,75	Hiszto gram
200	3	0,0545		
200	4	0,0727	Az 5 %-os alsó küszöb valószínűségi változója: Átlag - 1,645 *szórás: 206,2 N	
200	5	0,0909	Ekkor a szórások tartományában a valószínűségek 90 %-a található.	
250	6	0,1091		
300	7	0,1273		
300	8	0,1455		
350	9	0,1636	Várhatóérték - egyszeres szórás: 376,3 N	
400	10	0,1818		
400	11	0,2000		
450	12	0,2182		
500	13	0,2364	25 %-os alsó kvantilis: 500 N és valószínűsége: 0,25*55=13,75	Hiszto gram
500	14	0,2545		
500	15	0,2727		
500	16	0,2909	Módusz, a lognormális eloszlás legnagyobb gyakoriságához tartozó valószínűségi változó: 455 N	
500	17	0,3091	Ez valamivel több, mint az óriás harcsa tényleges, mért súlya (451,26 N).	
500	18	0,3273		
540	19	0,3455		
540	20	0,3636		
540	21	0,3818	Medián, lognormális eloszlás esetén: 556 N	
570	22	0,4000		
600	23	0,4182		
600	24	0,4364		
600	25	0,4545		
630	26	0,4727	A becsült értékek várhatóértéke: 640 N	A becsült értékek szórása: 263,7 N
650	27	0,4909		

Az óriás harcsa becsült súlya, 4. oldal

Valószínűségi változó, N	Valószínűség	Relatív valószínűség
650	28	0,5091
650	29	0,5273
660	30	0,5455
700	31	0,5636
700	32	0,5818
700	33	0,6000
700	34	0,6182
700	35	0,6364
720	36	0,6545
750	37	0,6727
750	38	0,6909
780	39	0,7091
800	40	0,7273
800	41	0,7455
800	42	0,7636
800	43	0,7818
800	44	0,8000
800	45	0,8182
800	46	0,8364
810	47	0,8545
850	48	0,8727
870	49	0,8909
950	50	0,9091
1000	51	0,9273
1000	52	0,9455
1100	53	0,9636
1200	54	0,9818
1500	55	1,0000

További matematikai statisztikai jellemzők

A becsült értékek ferdesége: 0,495
A becsült értékek csúcsossága: 1,153

Hisztogram

55 főiskolai hallgató

fénykép után megbecsülte az óriás harcsa súlyát.

Ezen az oldalon a becslés

matematikai statisztikai feldolgozása található.

A hisztogramot és a közelítő normális, illetve lognormális eloszlások
gyakoriságfüggvényeit négy ábrán mutatjuk be.

75 %-os alsó kvantilis: 800 N
és valószínűsége. $0,75 \cdot 55 = 41,25$

Hisztogram

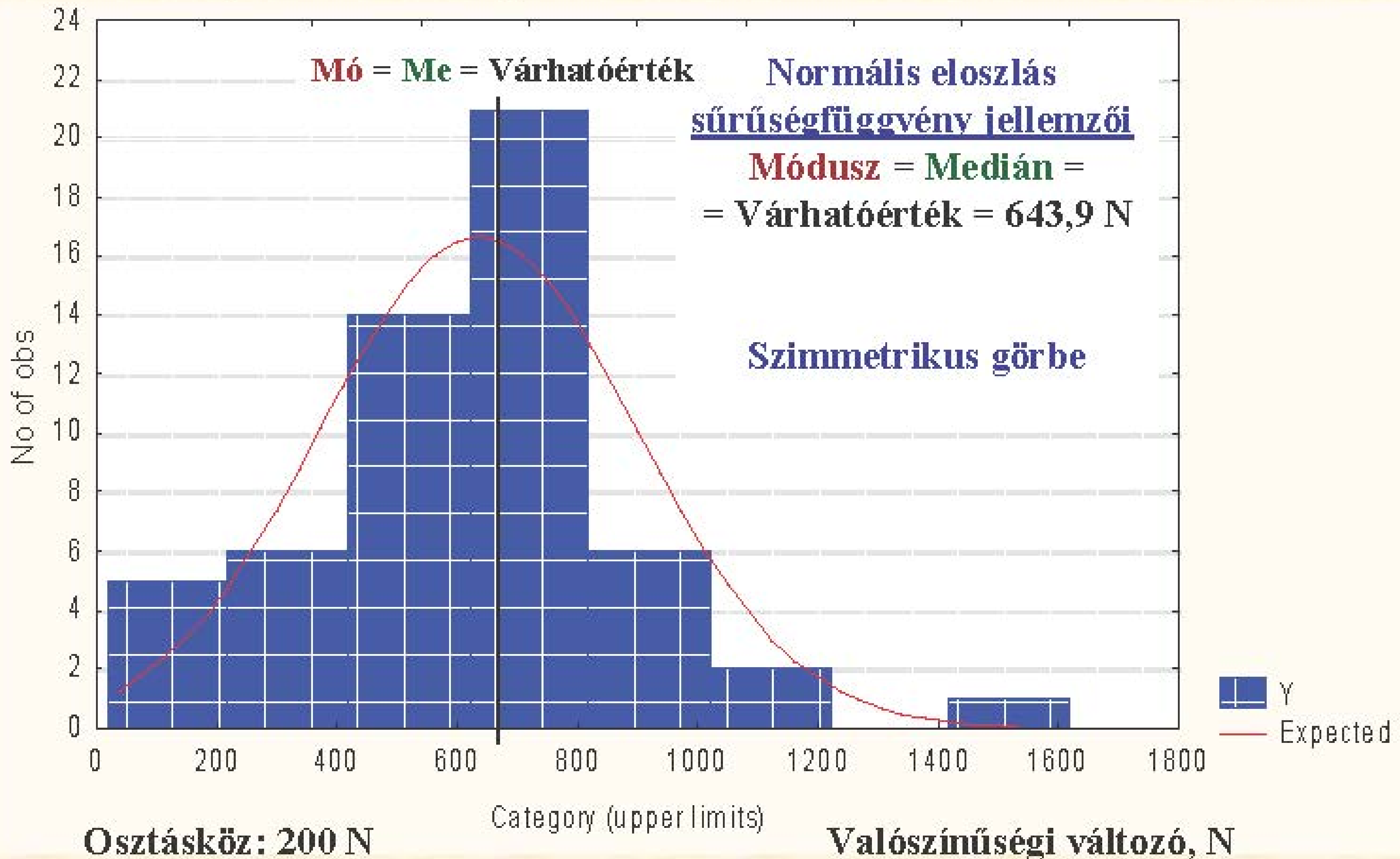
Normális eloszlás esetén

az egyszeres szórások tartományában a valószínűségek 68,27 %-a,
az 1,96-szoros szórások tartományában a valószínűségek 95 %-a található.

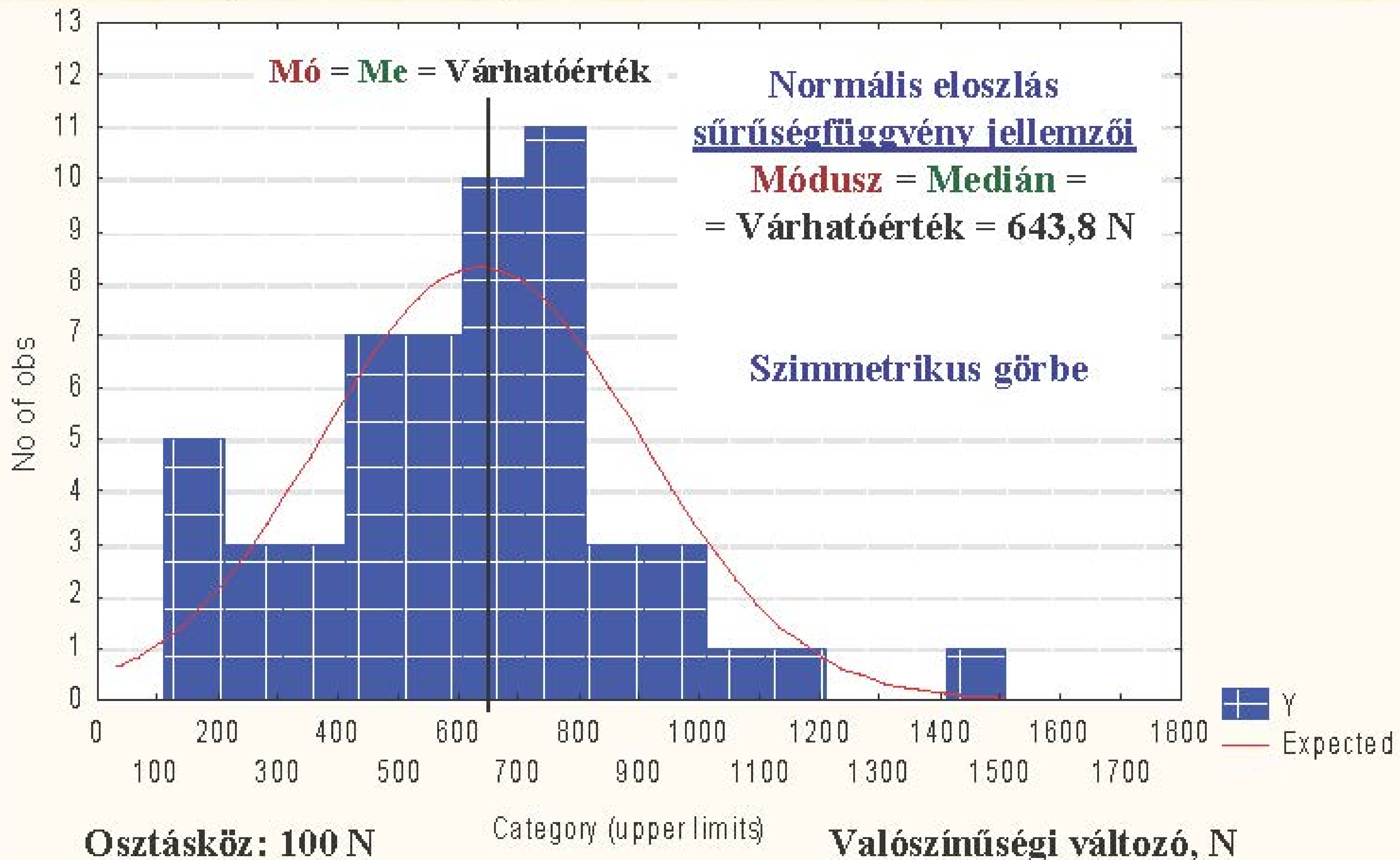
Várhatóérték + egyszeres szórás: 903,7 N

Várhatóérték + 1,96 * szórás: 1156,9 N

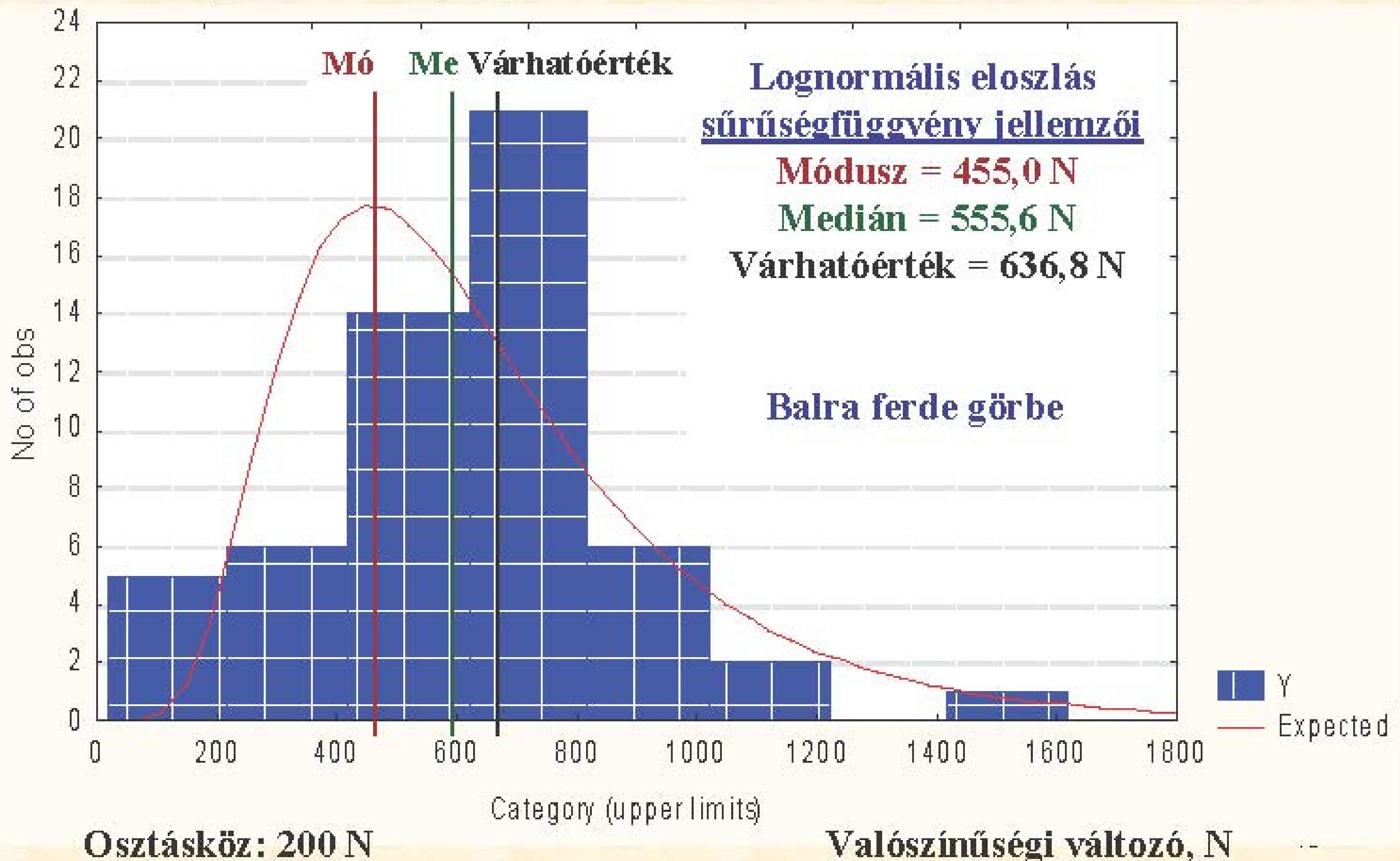
Az óriás harcsa súlya valószínűségének gyakorisági görbéje (szimmetrikus) *normális eloszlás* feltételezésével



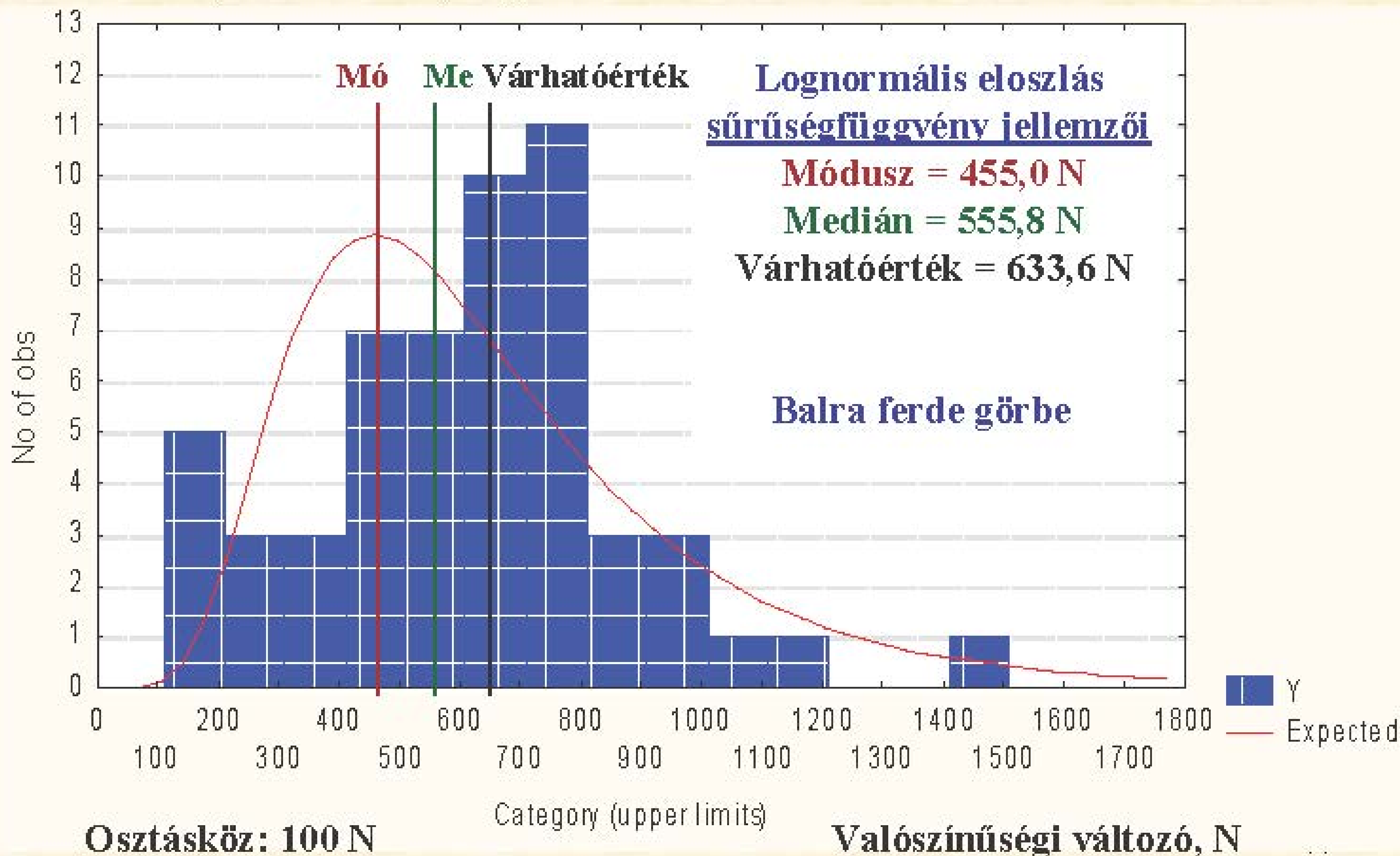
Az óriás harcsa súlya valószínűségének gyakorisági görbéje (szimmetrikus) *normális eloszlás* feltételezésével



Az óriás harcsa súlya valószínűségének gyakorisági görbéje (balra ferde) *lognormális eloszlás* feltételezésével

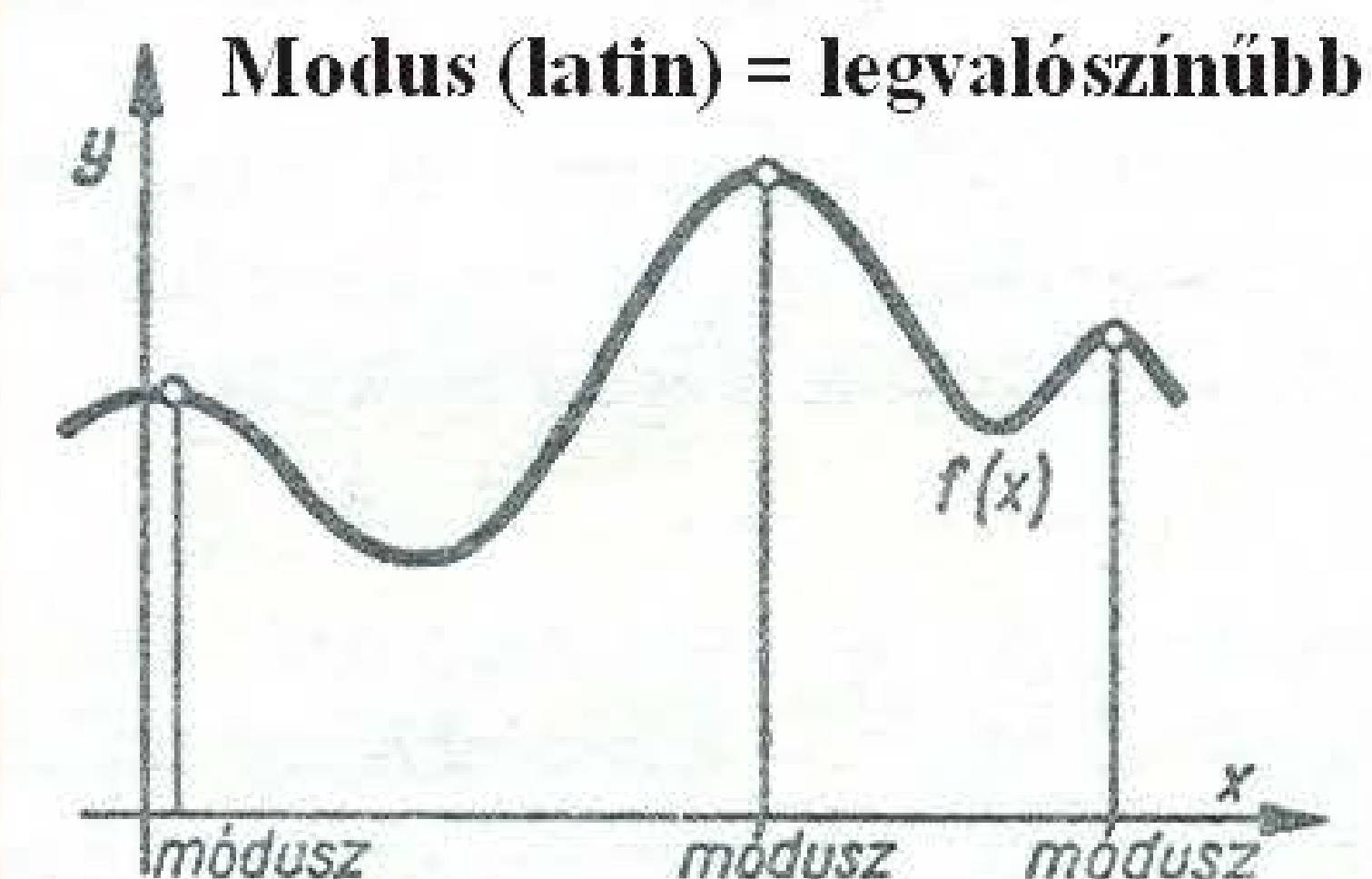


Az óriás harcsa súlya valószínűségének gyakorisági görbéje (balra ferde) *lognormális eloszlás* feltételezésével



Néhány fogalom (4)

Módusz: A környezetében a legnagyobb (relatív) gyakorisághoz tartozó valószínűségi változó, magyarul a (relatív) *gyakorisági görbe csúcsához tartozó abszcissa érték*, amelyből akár több is lehet.



Medián (latin = középső): A $p = 0,5$ értékhez tartozó kvantilis. Mindig a módusz és az átlag (várhatóérték) közé esik. A kilógó adatokkal szembeni kis érzékenysége miatt *jobban jellemzi a nem normális eloszlásokat, mint az átlag vagy a várhatóérték.*

Kvantilis: Az a valószínűségi változó, amely adott arányban osztja fel a (relatív) gyakorisági görbe alatti területet, vagy a rendezett mintát stb.

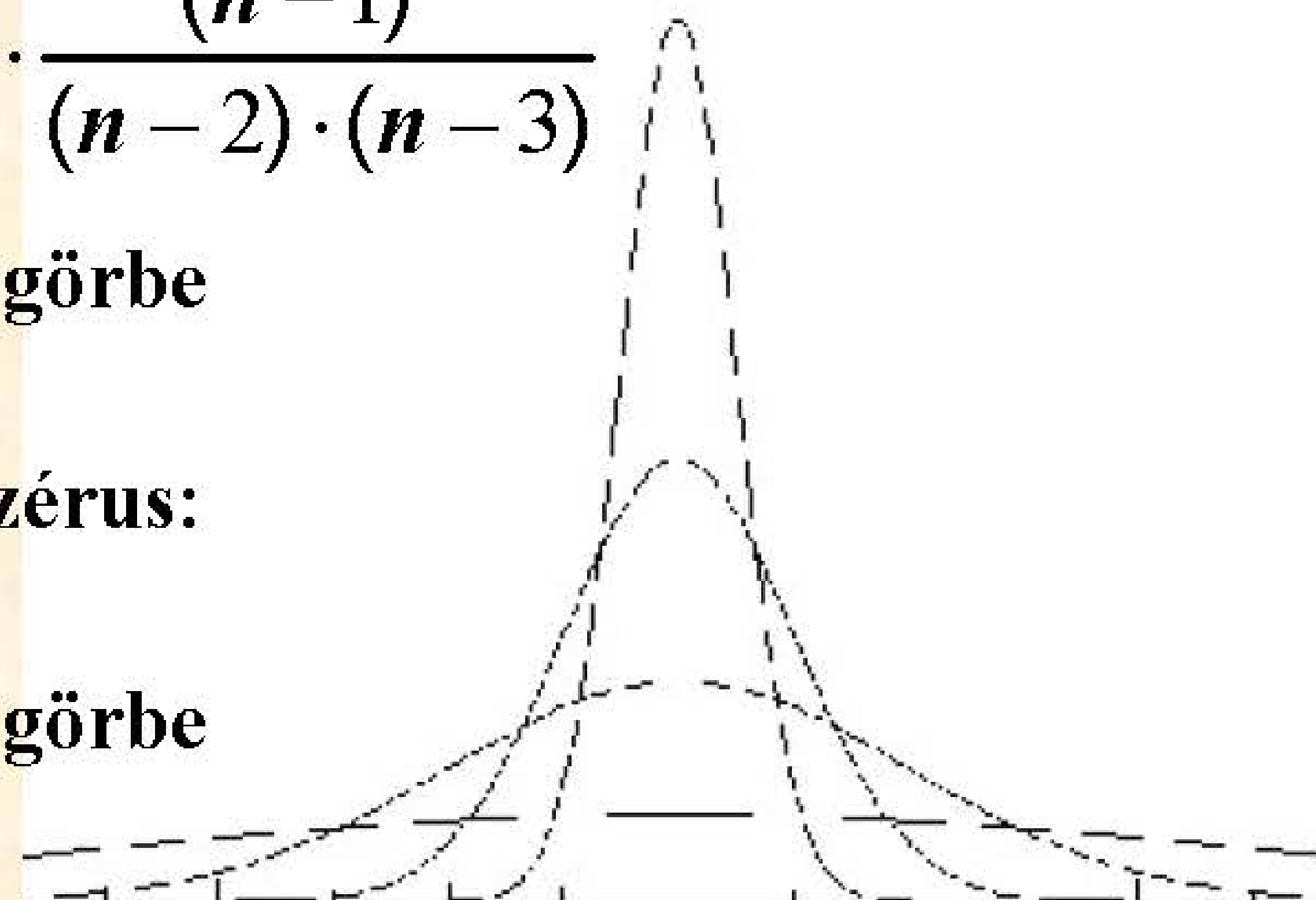
Lapultsági együttható (vagy nevezik **csúcsossági együtthatónak** is): Szimmetrikus gyakorisági görbe esetén a normál eloszlás alakjától való eltérést fejezi ki.

$$\gamma_{kurtosis} = \frac{n \cdot (n-1)}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{x} - x_i}{s} \right)^4 - 3 \cdot \frac{(n-1)^2}{(n-2) \cdot (n-3)}$$

A normális eloszlásénál **laposabb** gyakorisági görbe lapultsági együtthatója negatív szám: $\gamma_{kurtosis} < 0$.

A **normális eloszlás** lapultsági együtthatója zérus: $\gamma_{kurtosis} = 0$.

A normális eloszlásénál **csúcsosabb** gyakorisági görbe lapultsági együtthatója pozitív szám: $\gamma_{kurtosis} > 0$.



Néhány fogalom (5)

Szimmetrikus eloszlás: Eloszlás, amelynek a *ferdeségi együtthatója* **zérus**: $\gamma_{\text{skewness}} = 0$.

Ferdeség (skewness ejtsd: szkjunesz): Jobbra vagy balra ferde eloszlás tulajdonsága.

Ferdeségi együttható:

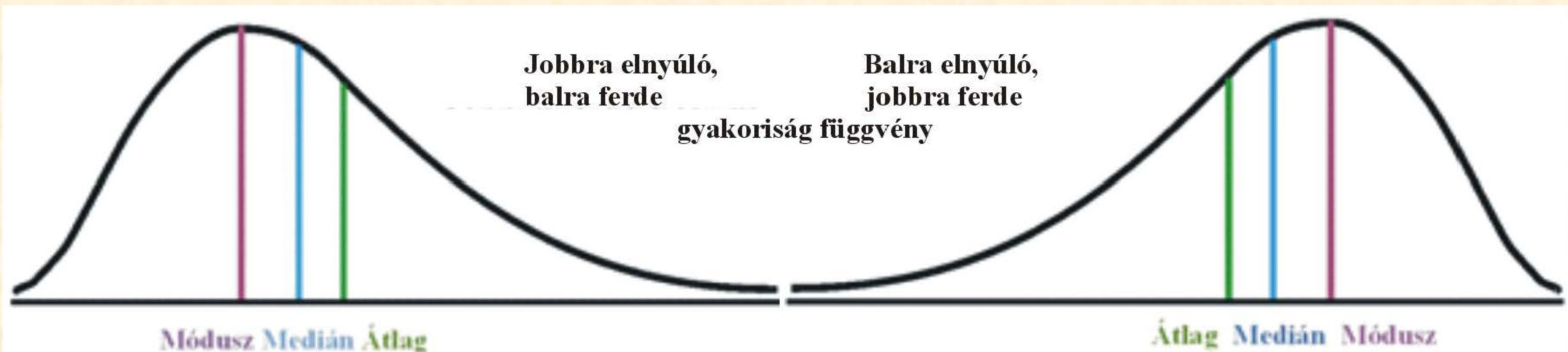
$$\gamma_{\text{skewness}} = \frac{n}{(n-1) \cdot (n-2)} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{x} - x_i}{s} \right)^3$$

Balra ferde eloszlás: Ha az eloszlás gyakorisági görbéje hosszan *jobbra elnyúlik*, akkor azt mondjuk, hogy balra dől, ekkor *ferdeségi együtthatója pozitív szám*:

$\gamma_{\text{skewness}} > 0$. (Általában ilyen a kisebb szilárdságú anyagok szilárdsági eloszlása.)

Jobbra ferde eloszlás: Ha az eloszlás gyakorisági görbéje hosszan *balra elnyúlik*, akkor azt mondjuk, hogy jobbra dől, ekkor *ferdeségi együtthatója negatív szám*:

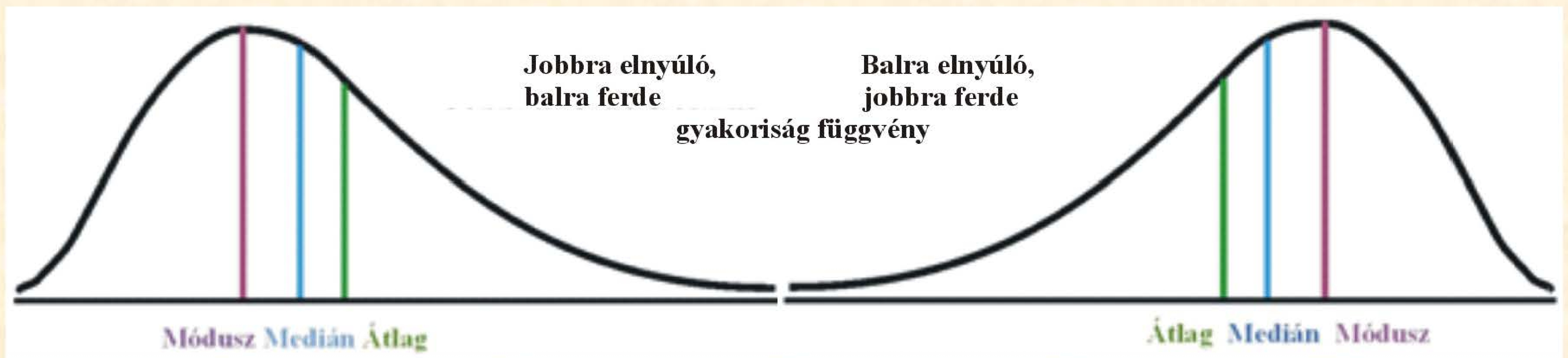
$\gamma_{\text{skewness}} < 0$. (Általában ilyen a nagyobb szilárdságú anyagok szilárdsági eloszlása.)



Néhány fogalom (6)

Módusz – medián – átlag (várhatóérték) viszonya *ferde eloszlás* esetén:

- Ferde eloszlás esetén a **medián** (középső valószínűségi változó) a gyakorisági görbe csúcsától – a **módusztól** – a ferdeség irányába esik.
- A **medián** mindig a **módusz** és a számtani **átlag** (várhatóérték) közé esik.
- Balra ferde eloszlás esetén a számtani **átlag** (várhatóérték) nagyobb, mint a **medián** (Me): $m > Me$
- Jobbra ferde eloszlás esetén a számtani **átlag** (várhatóérték) kisebb, mint a **medián** (Me): $m < Me$



Magyarországon 1980-2002 között, az MSZ 4720-2:1980 szabvány szerint a beton nyomószilárdságának jellemző értékét (küszöbértékét, R_k) a beton nyomószilárdsági eloszlása **ferdeségének feltételezésével (**k tényező**) számítottuk ki.**

3.5.2. A nyomószilárdság ellenőrzésénél a vizsgálati eredmények R_k jellemző értékét az

$$R_k = R_m - k \cdot t \cdot s$$

kifejezéssel kell meghatározni, ahol

R_m a vizsgálati eredmények átlaga,
 k a szilárdság eloszlásának típusát figyelembevevő, a vizsgálati eredmények átlagától függő tényező, mely az 1. táblázatból vehető.

Szórás
Student tényező

Számítógép alkalmazása esetén k értékét az alábbi kifejezésből kell meghatározni:

$$k = 0,540 + 0,1027 \sqrt{R_m}$$

ahol R_m értékét N/mm^2 dimenzióban kell behelyettesíteni.

A k tényező értékei

	Balra ferde				Szimmetrikus	Jobbra ferde				1. táblázat
R_m N/mm^2	5	7	10	14	20	28	40	50	56	
k	0,77	0,81	0,87	0,92	1,00	1,08	1,19	1,27	1,31	

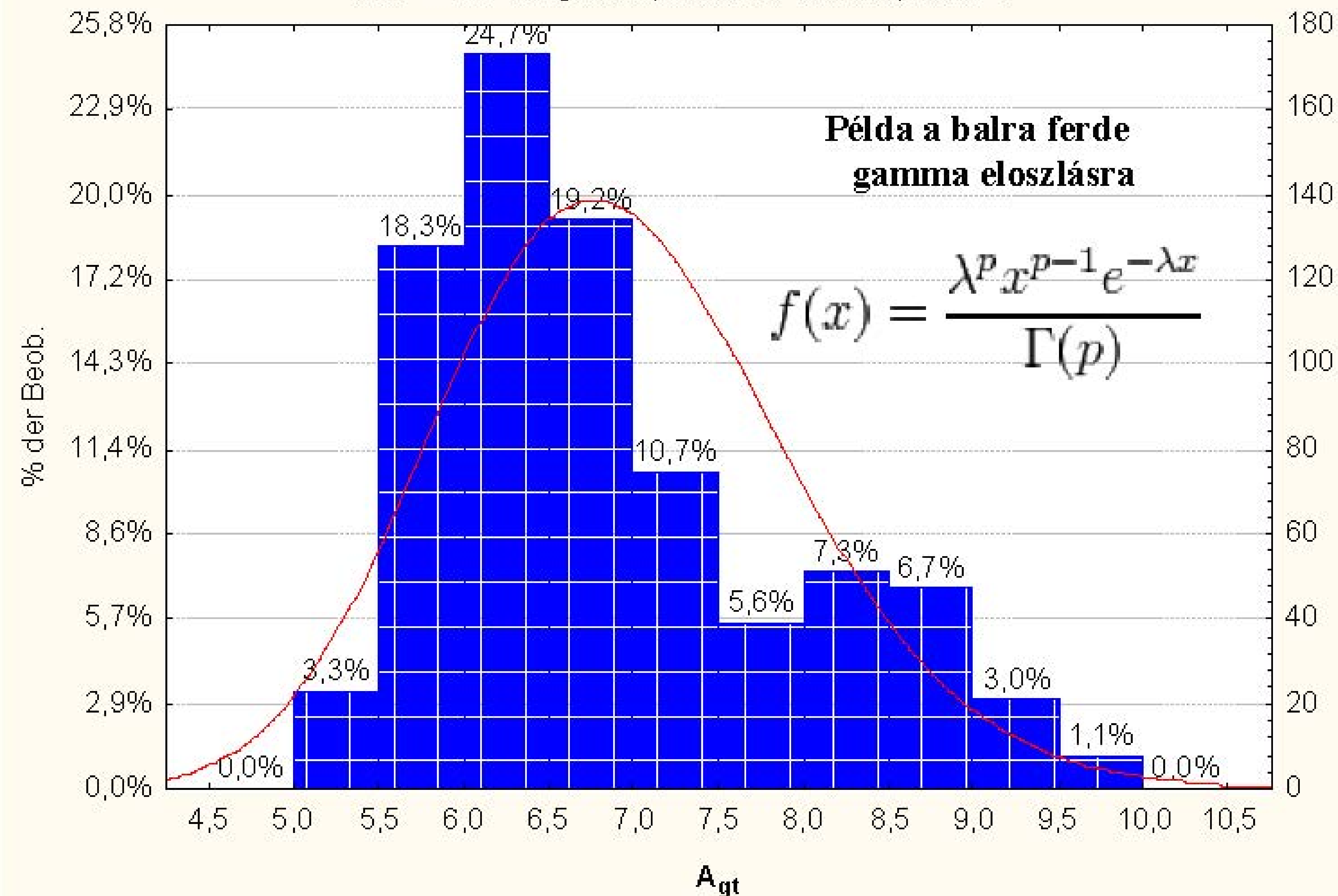
Megjegyzés: A táblázatban nem szereplő közbenső értékek arányos közbeiktatással határozhatók meg.

<u>Beton próbatetek</u> <u>vizsgálati eredménye</u>	Számpélda a vizsgálati eredmények eloszlása ferdeségnek figyelembevételére a k tényezővel		
Nyomószilárdság N/mm^2	Értékelés a régi, ma már érvénytelen MSZ 4719:1982 és MSZ 4720/2:1980 szabvány alapján		
32,8	Eloszlás tényező: $k = 1,125$ Student tényező: $t = 2,015$ $k \cdot t \cdot s$ szorzat = 5,1 Jellemző érték: $R_k =$ $= R_m - k \cdot t \cdot s = 27,3 \text{ N/mm}^2$		
35,1			
31,9			
34,2			
28,7			
31,7			
$R_m = 32,4$ átlag	Megfelel, ha a megkövetelt minősítési érték: $R_{k, \text{nom}} = 25 \text{ N/mm}^2$		
$s = 2,24$ szórás			

A példabeli vizsgálati eredmények eloszlása jobbra ferde, balra elnyúló (a kisebb szilárdságok tartománya felé elnyúló), mert $R_m > 20 \text{ N/mm}^2$. 49

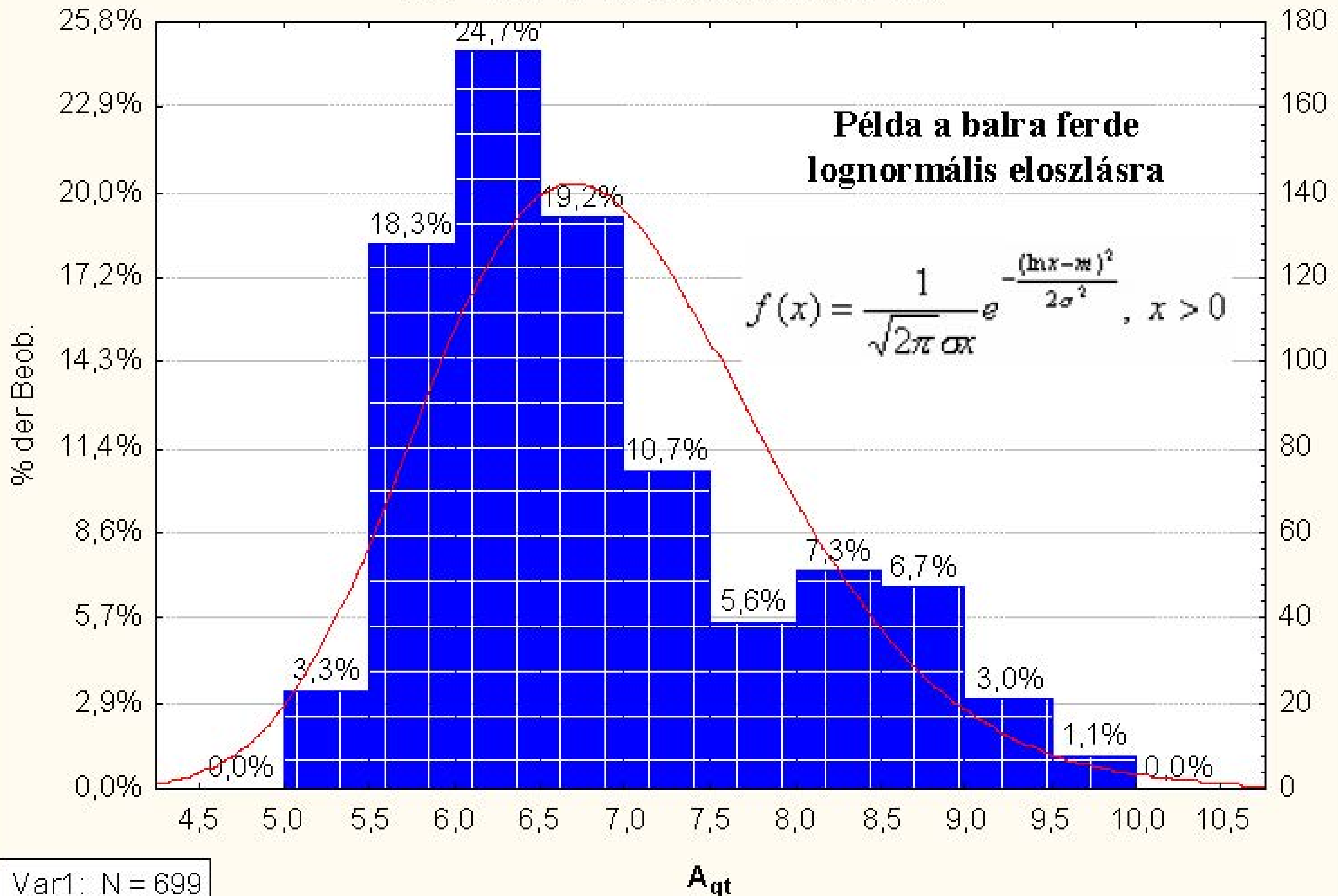
Histogramm (Tabelle2 in Arbeitsmappe1.stw 699v*699c)

Var1 = 699*0,5*gamma(x/0,1494; 46,2111)/0,1494



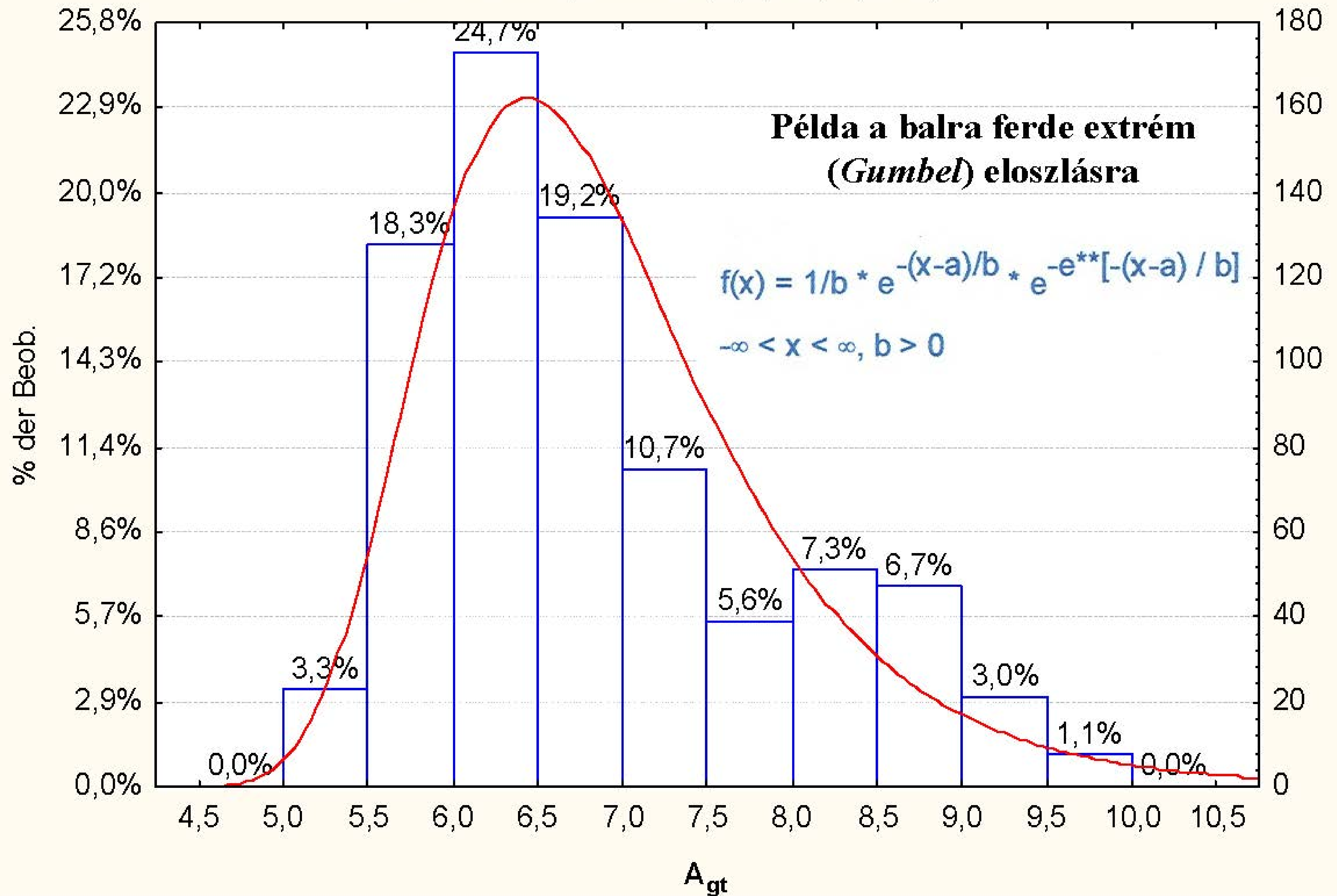
Histogramm (Tabelle2 in Arbeitsmappe1.stw 699v*699c)

Var1 = 699*0,5*lognorm(x; 1,921; 0,1456)



Histogramm (Tabelle2 in Arbeitsmappe1.stw 699v*699c)

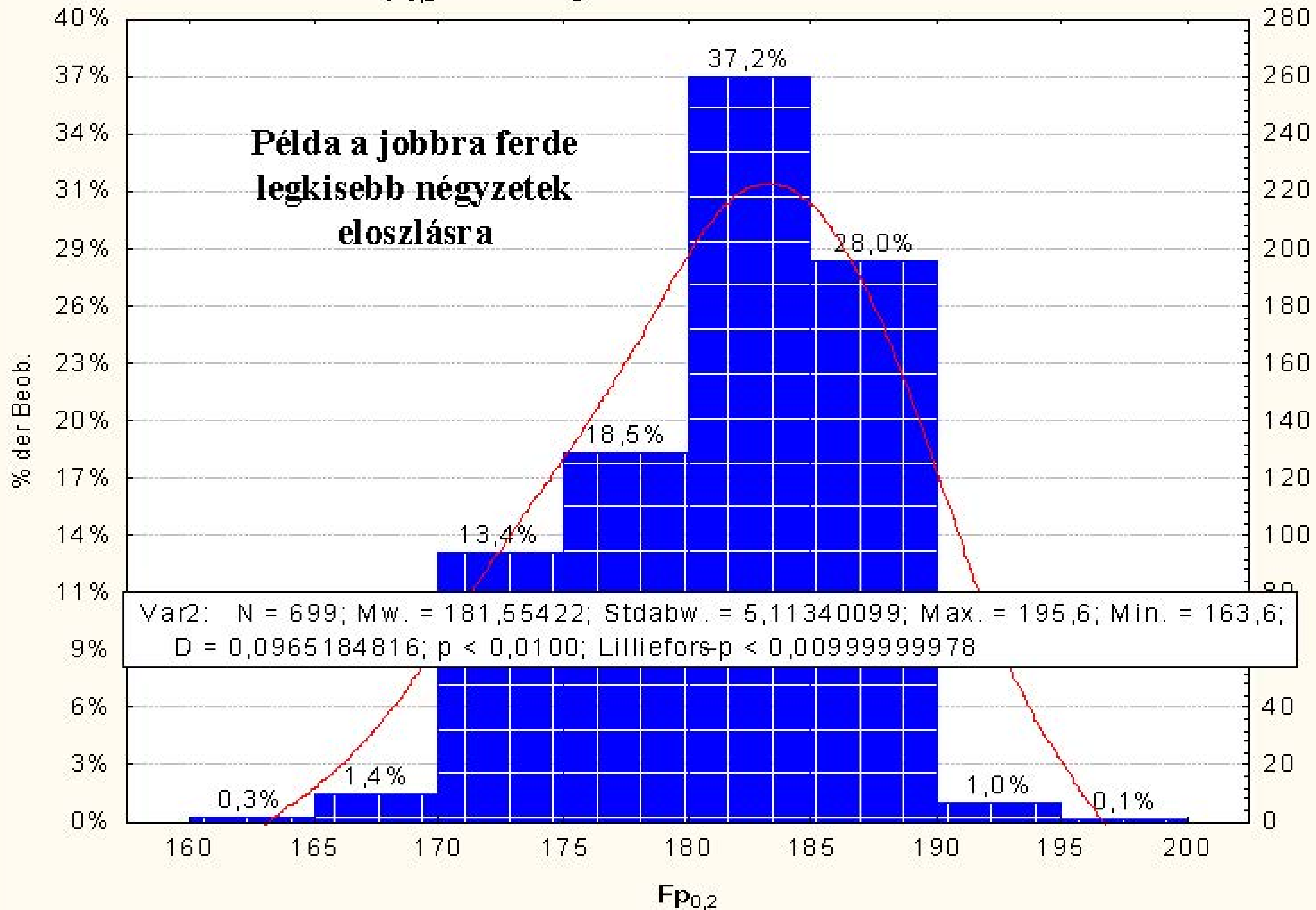
Var1 = 699*0,5*extreme(x; 6,426; 0,7925)



Histogramm (Tabelle 2 in Arbeitsmappe1.stw 699v*699c)

$Fp_{0,2}$ = Distanz-gewichtete kleinste Quadrate

**Példa a jobbra ferde
legkisebb négyzetek
eloszlására**



Regressziós közelítés a legkisebb hibanégyzet összegek módszerével

Egyenes együtthatóinak kétismeretlenes egyenletrendszere

$$y = a * x + b \quad \leftarrow \text{Ez a függvény alak}$$

$$F = \sum (y_i - y)^2 = \sum (y_i - a * x_i - b)^2 \Rightarrow \min$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 * \sum (y_i - a * x_i - b) * x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2 * \sum (y_i - a * x_i - b) = 0$$

$$\sum x_i * y_i - a * \sum x_i^2 - b * \sum x_i = 0$$

$$\sum y_i - a * \sum x_i - b * n = 0$$

Elnevezések:

$(y_i - y) =$ hiba

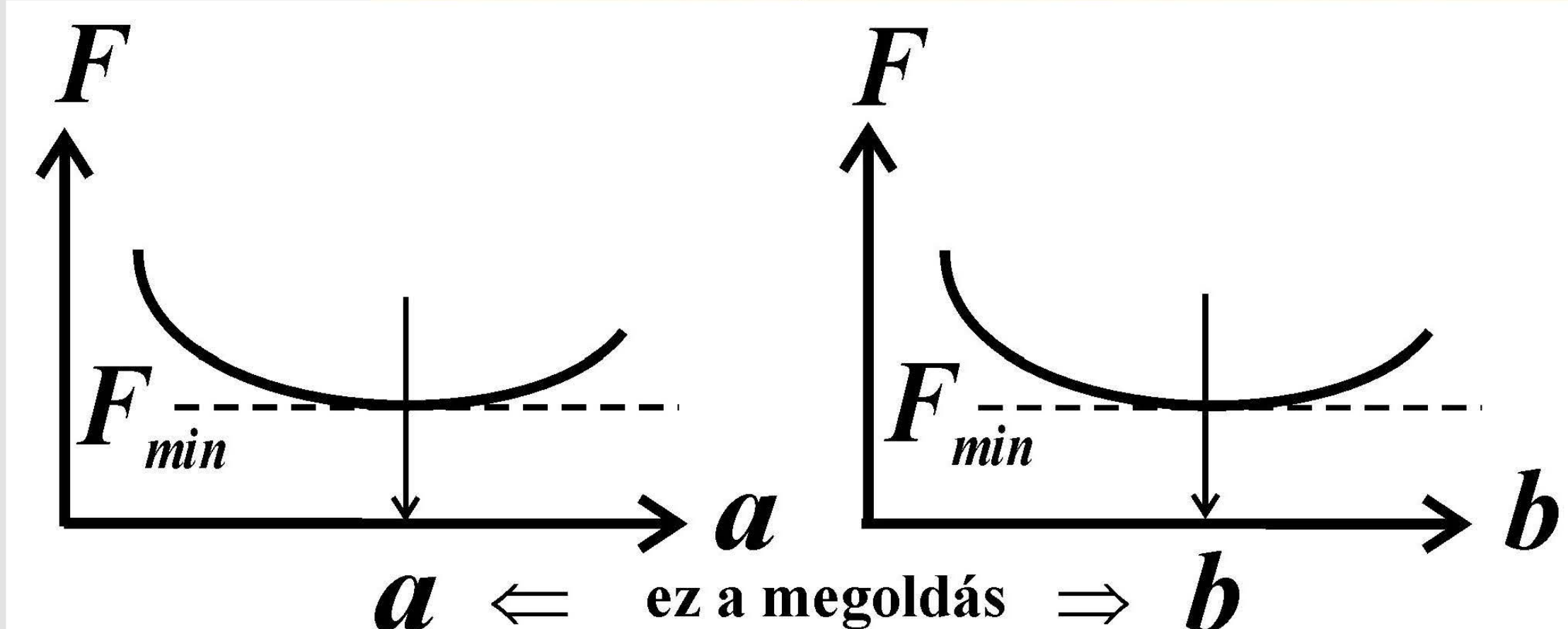
$(y_i - y)^2 =$ hibanégyzet

$\Sigma(y_i - y)^2 =$ hibanégyzet
összeg

Módszer neve ezért:

**Legkisebb hibanégyzet
összegek módszere**

Az F hibanégyzet összeg függvénynek ott van szélső értéke, esetünkben minimuma, ahol a deriváltjainak ($\partial F/\partial a$ és $\partial F/\partial b$) az értéke zérus (érintője vízszintes):



$$D = \left| \frac{\sum x^2}{\sum x} \right|$$

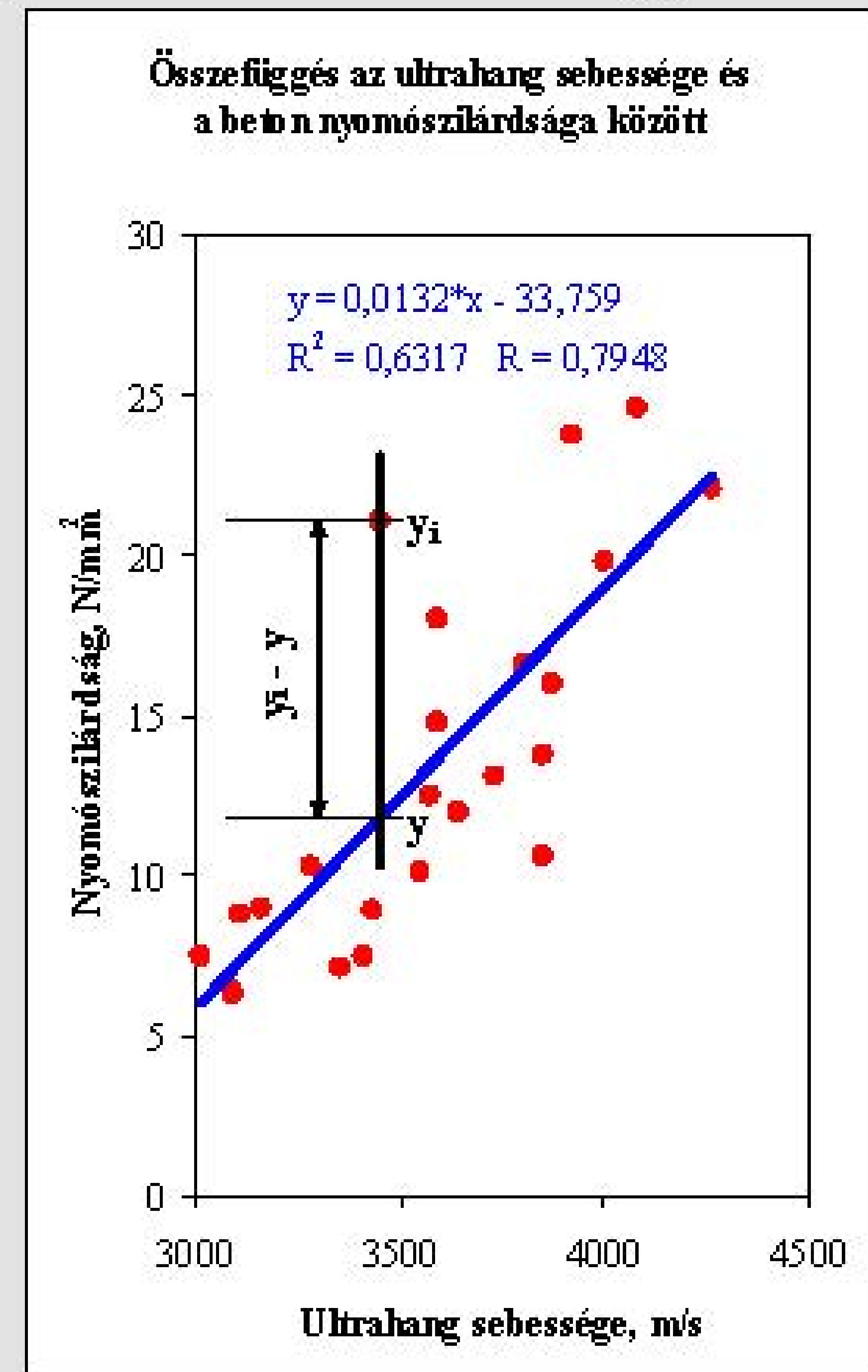
$$D_a = \left| \frac{\sum x * y}{\sum y} \right|$$

$$D_b = \left| \frac{\sum x^2}{\sum x} \right|$$

$$a = \frac{D_a}{D}$$

$$b = \frac{D_b}{D}$$

Regressziós közelítés egyenessel



Meghatározandó részmennyiségek:

$$\begin{matrix} \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum y_i & \sum x_i * y_i \end{matrix}$$

Másodfokú parabola együtthatóinak háromismeretlenes egyenletrendszere

$$y = a * x^2 + b * x + c \quad \leftarrow \text{Ez a közelítő függvény alakja}$$

$$F = \sum (y_i - y)^2 = \sum (y_i - a * x_i^2 - b * x_i - c)^2 \Rightarrow \min$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 * \sum (y_i - a * x_i^2 - b * x_i - c) * x_i^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2 * \sum (y_i - a * x_i^2 - b * x_i - c) * x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = -2 * \sum (y_i - a * x_i^2 - b * x_i - c) = 0$$

$$\sum x_i^2 * y_i - a * \sum x_i^4 - b * \sum x_i^3 - c * \sum x_i^2 = 0$$

$$\sum x_i * y_i - a * \sum x_i^3 - b * \sum x_i^2 - c * \sum x_i = 0$$

$$\sum y_i - a * \sum x_i^2 - b * \sum x_i - c * n = 0$$

Regressziós közelítés másodfokú parabolával

$$D = \begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & n \end{vmatrix}$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \sum x_i^2 * y_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i * y_i & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum y_i & \sum x_i & n \end{vmatrix}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^2 * y_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i * y_i & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum y_i & n \end{vmatrix}$$

$$D_c = \begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 * y_i \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i * y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum y_i \end{vmatrix}$$

$$a = \frac{D_a}{D}$$

$$b = \frac{D_b}{D}$$

$$c = \frac{D_c}{D}$$

Meghatározandó részmennyiségek:

$$\begin{array}{cccc} \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \\ \Sigma y_i & \Sigma x_i * y_i & \Sigma x_i^2 * y_i & \end{array}$$

A közelítés pontosságáról a korrelációs együttható (egyenestől), illetve a korrelációs index (görbe esetén) ad felvilágosítást.

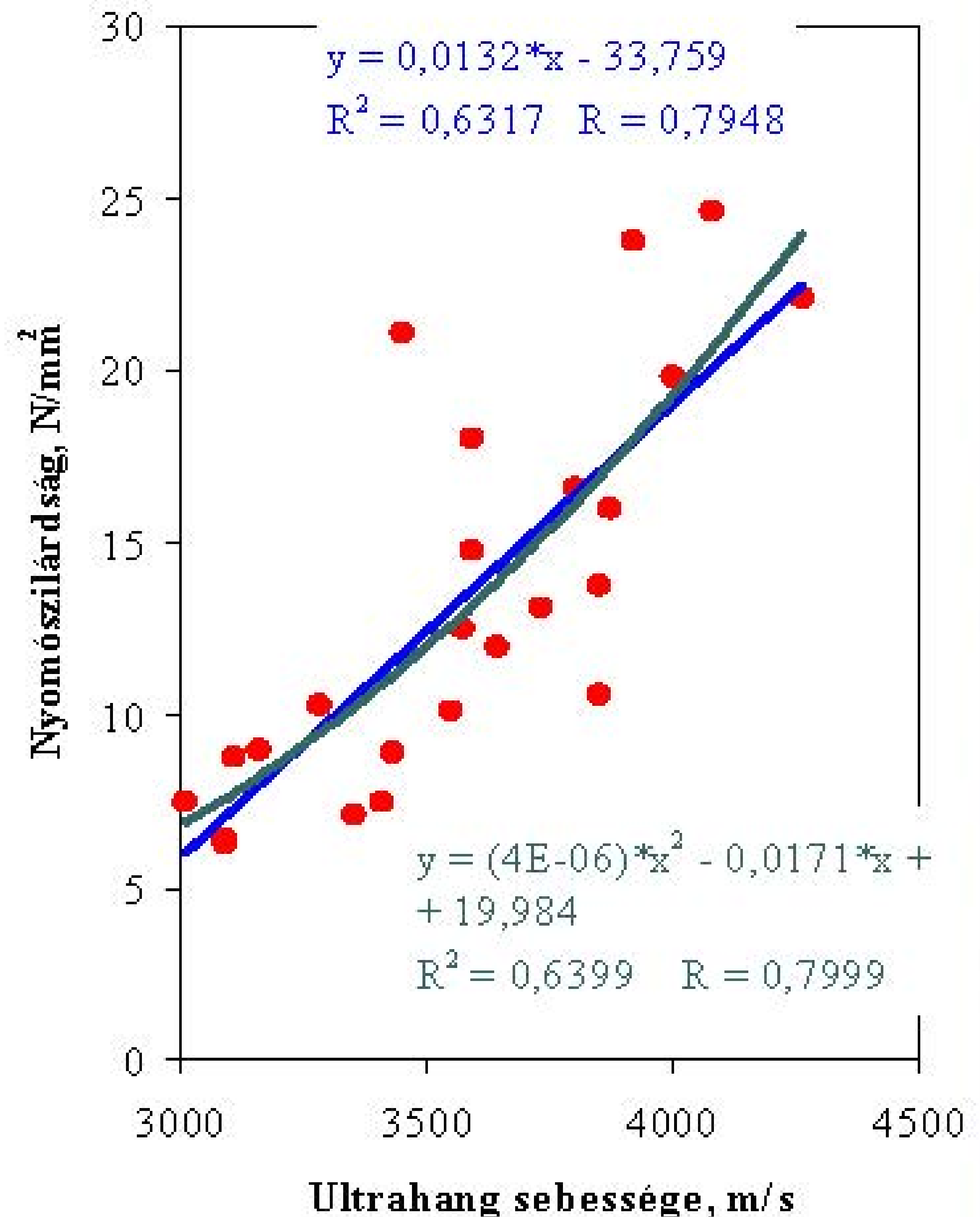
Mennél pontosabb a közelítés, az R korrelációs együttható, illetve index annál nagyobb és értéke mind inkább tart az 1,0-hez:

$$R \rightarrow 1,0$$

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sum \left(y_i - \frac{\sum y_i}{n} \right)^2}}$$

A korrelációs együtthatót, illetve indexet az irodalomban I -vel is jelölik.

Összefüggés az ultrahang sebessége és a beton nyomószilárdsága között



KÖSZÖNÖM A FIGYELMŰKÉRT